BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Remplir la feuille annexe selon les modalités expliquées ci-dessous :

- **Ne pas oublier d'écrire nom, prénom et classe dans le cadre et de noircir le code personnel.**
- Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
- Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève aucun point.
- Noircir proprement, pour chaque question, la case correspondant à la bonne réponse. En cas d'erreur, effacer à l'aide de blanc correcteur en couvrant la case cochée par erreur. Dans ce cas, ne pas reconstituer la case effacée, cela pourrait être considéré comme une bonne réponse.
- **Ne pas glisser le qcm dans la copie mais le rendre séparément.**

Exercice 2 — 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.
   b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.
   c) Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   d) En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T.
2. a) Calculer la limite de la fonction f en 0.
   b) Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On note α cette solution.
   b) Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4{,}3\,;4{,}4[$.
   c) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
5. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :
   On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien ln.

```python
def seuil(pas):
    x = 4.3
    while x*log(x) - x - 2 < 0:
        x = x + pas
    return x
```

   Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 **5 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Montrer que, pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
   b) Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	1		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

   c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g\left(u_n\right)$.

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

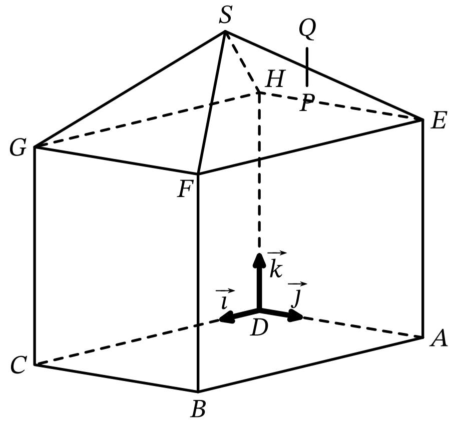
On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation :

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 4 — 6 points

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ surmonté d'une pyramide $EFGHS$.
On a $DC = 6$, $DA = DH = 4$.
Soit les points I, J et K tels que : $\overrightarrow{DI} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DH}$.
On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{DI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{DJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{DK}$. On se place dans le repère orthonormé $\left(D\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\right)$.
On admet que le point S a pour coordonnées $(3\,;2\,;6)$.



1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.
2. Démontrer que le volume de la pyramide $EFGHS$ représente le septième du volume total de la maison. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$$

3. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.
4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment $[PQ]$. On dispose des données suivantes :
   — le point P appartient au plan (EFS) ;
   — le point Q a pour coordonnées $(2\,;3\,;5{,}5)$;
   — la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

   a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5{,}5 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

   b) En déduire les coordonnées du point P.

   c) En déduire la longueur PQ de l'antenne.
5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = 7 - 4s \\ z = 2 + 4s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

   Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ.
   L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment $[PQ]$?