

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1**4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Remplir la feuille annexe selon les modalités expliquées ci-dessous :

- **Ne pas oublier d'écrire nom, prénom et classe dans le cadre et de noircir le code personnel.**
- Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
- Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève aucun point.
- Noircir proprement, pour chaque question, la case correspondant à la bonne réponse. En cas d'erreur, effacer à l'aide de blanc correcteur en couvrant la case cochée par erreur. Dans ce cas, ne pas reconstituer la case effacée, cela pourrait être considéré comme une bonne réponse.
- **Ne pas glisser le qcm dans la copie mais le rendre séparément.**

Exercice 2**5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.

Correction :

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \boxed{\ln(x)}$$

- b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = e$.

Correction :

L'équation réduite de la tangente T est : $y = f'(e)(x - e) + f(e)$.

On a $f'(e) = \ln(e) = 1$ et $f(e) = e \ln(e) - e - 2 = e - e - 2 = -2$.

Ainsi : $T : y = x - e - 2$

- c) Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Correction :

f' est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f''(x) > 0$ donc f est convexe sur $]0 ; +\infty[$.

- d) En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T .

Correction :

f est convexe sur $]0 ; +\infty[$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

Ainsi $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T .

2. a) Calculer la limite de la fonction f en 0.

Correction :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \text{ (Croissance comparée)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} -x - 2 = -2 \end{array} \right\} \text{ donc, par somme, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2.}$$

- b) Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

Correction :

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = x(\ln(x) - 1) - 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc, par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x) - 1) = +\infty.$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Correction :

La fonction $\ln$ s'annule en 1, est négative sur $]0 ; 1[$ et positive sur $]1 ; +\infty[$. On en déduit le tableau ci-dessous :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		- 0 +	
Variations de f	-2	-3	$+\infty$

4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On note α cette solution.

Correction :

Sur $[1 ; +\infty[$:

f est dérivable donc continue sur $[1 ; +\infty[$
 f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$
 $f(1) = -3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in [-3 ; +\infty[$

$\left. \begin{array}{l} \text{donc, d'après le théorème de la bijection,} \\ \text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique so-} \\ \text{lution dans l'intervalle } [1 ; +\infty[. \end{array} \right\}$

Sur $]0 ; 1]$:

f est strictement décroissante sur $]0 ; 1]$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 < 0$ donc f ne s'annule pas sur $]0 ; 1]$

Conclusion :

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4,3 ; 4,4[$.

Correction :

$f(4,3) \approx -0,028 < 0$ et $f(4,4) \approx 0,119 > 0$. Ainsi $\alpha \in]4,3 ; 4,4[$

c) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Correction :

À l'aide des variations de f et de la question précédente, on obtient le signe de f :

x	0	1	α	$+\infty$
Variations de f	-2		0	$+\infty$
		-3		
Signe de $f(x)$		-	0	+

5. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :

On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien $\ln$.

```
1 def seuil(pas):
2     x = 4.3
3     while x*log(x) - x - 2 < 0:
4         x = x + pas
5     return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Correction :

La valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` est 4,32. Il s'agit de la plus petite valeur dont l'image est positive lorsqu'on parcourt les réels par pas de 0,01 à partir de 4,3. C'est donc la valeur approchée par excès de α à 0,01 près.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a) Montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Correction :

Pour tout nombre réel $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \boxed{\frac{1 - \ln(x)}{x^2}}$$

b) Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

x	1	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-

Correction :

Pour tout nombre réel $x > 1$, $x^2 > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $1 - \ln(x)$ sur $[1 ; +\infty[$.

- $1 - \ln(x) > 0 \iff \ln(x) < 1 \iff x < e$ (fonction exponentielle croissante sur $\mathbb{R}$)
- $1 - \ln(x) < 0 \iff \ln(x) > 1 \iff x > e$ (fonction exponentielle croissante sur $\mathbb{R}$)
- $1 - \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$

Les trois résultats ci-dessus justifient le tableau de signes de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .

Correction :

On déduit de la question précédente le tableau ci-dessous :

x	1	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	0	e^{-1}	0

2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; e]$.

Correction :

f est dérivable donc continue sur $[1; e]$
 f est strictement croissante sur $[1; e]$
 $f(1) = 0$ et $f(e) \approx 0,368$ donc $\frac{1}{4} \in [f(1); f(e)]$

donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1; e]$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{\frac{x}{4}}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}} \text{ c'est-à-dire : } u_{n+1} = g(u_n).$$

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction :

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $g'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}} > 0$.
 donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.

Correction :

- Initialisation : On a $u_0 = 1$ et $u_1 = e^{\frac{1}{4}} \approx 1,28$ donc $u_0 < u_1 \leq e$.
L'inégalité est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $u_p < u_{p+1} \leq e$.
 g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(u_p) < f(u_{p+1}) \leq g(e)$
 ainsi $u_{p+1} < u_{p+2} \leq e^{\frac{e}{4}} \leq e$. Car $e^{\frac{e}{4}} \approx 1,97$
 La propriété est héréditaire.
- Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1} \leq e.}$

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Correction :

D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée par e donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation :

$$e^{\frac{x}{4}} = x$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.

Correction :

Remarque : Si un réel x est solution de $e^{\frac{x}{4}} = x$ alors $x > 0$.

On a alors :

$$e^{\frac{x}{4}} = x \iff \ln\left(e^{\frac{x}{4}}\right) = \ln(x) \iff \frac{x}{4} = \ln(x) \iff \frac{1}{4} = \frac{\ln(x)}{x} \iff f(x) = \frac{1}{4}$$

ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$

5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n) .

Correction :

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\ell \approx 1,43$

Exercice 4

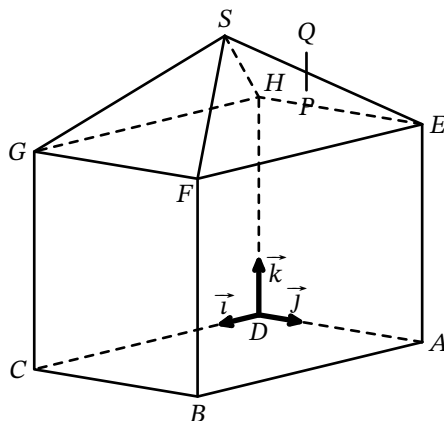
6 points

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ surmonté d'une pyramide $EFGHS$. On a $DC = 6$, $DA = DH = 4$.

Soit les points I, J et K tels que : $\vec{DI} = \frac{1}{6}\vec{DC}$, $\vec{DJ} = \frac{1}{4}\vec{DA}$, $\vec{DK} = \frac{1}{4}\vec{DH}$.

On note $\vec{i} = \vec{DI}$, $\vec{j} = \vec{DJ}$, $\vec{k} = \vec{DK}$. On se place dans le repère orthonormé $(D; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On admet que le point S a pour coordonnées $(3; 2; 6)$.



- Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G .

Correction :

Par lecture graphique, on a : $B(6; 4; 0)$, $E(0; 4; 4)$, $F(6; 4; 4)$ et $G(6; 0; 4)$

- Démontrer que le volume de la pyramide $EFGHS$ représente le septième du volume total de la maison. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$$

Correction :

— Pyramide

$$\mathcal{V}_{EFGHS} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{EFGH} \times h = \frac{1}{3} \times 6 \times 4 \times 2 = 16$$

— Maison

$$\mathcal{V}_{\text{Maison}} = \mathcal{V}_{ABCDEFGH} + \mathcal{V}_{EFGHS} = 4 \times 4 \times 6 + 16 = 112$$

On a alors $\frac{\mathcal{V}_{EFGHS}}{\mathcal{V}_{\text{Maison}}} = \frac{16}{112} = \frac{1}{7}$

Le volume de la pyramide $EFGHS$ représente le septième du volume total de la maison.

- Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS) .

Correction :

On a $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ES} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \times 6 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{ES} = 0 \times 3 + 1 \times (-2) + 1 \times 2 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (EFS) .

Conclusion : $\vec{n}$ est normal au plan (EFS) .

- b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.

Correction :

$\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à (EFS) donc une équation cartésienne de (EFS) est de la forme :

$$y + z + d = 0.$$

De plus $E \in (EFS)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation.

On a donc : $y_E + z_E + d = 0$ donc $4 + 4 + d = 0$ soit $d = -8$

Une équation cartésienne du plan (EFS) est : $y + z - 8 = 0$.

4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment $[PQ]$. On dispose des données suivantes :

- le point P appartient au plan (EFS) ;
- le point Q a pour coordonnées $(2; 3; 5,5)$;
- la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

- a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Correction :

La droite (PQ) passe par $Q(2; 3; 5,5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de Δ est donc :
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- b) En déduire les coordonnées du point P .

Correction :

P est le point d'intersection de la droite (PQ) et du plan (EFS) .

$$P(x; y; z) \in (PQ) \cap (EFS) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \\ y + z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \\ 3 + 5,5 + t - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = -0,5 \\ x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Le point P a pour coordonnées : $P(2; 3; 5)$.

c) En déduire la longueur PQ de l'antenne.

Correction :

$$PQ = \sqrt{(2-2)^2 + (3-3)^2 + (5,5-5)^2} = 0,5$$

5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = 7 - 4s \\ z = 2 + 4s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ .

L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment $[PQ]$?

Correction :

On étudie l'existence d'un éventuel point d'intersection des deux droites.

$$M(x; y; z) \in (PQ) \cap \Delta \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 2 = -4 + 6s \\ y = 3 = 7 - 4s \\ z = 5,5 + t = 2 + 4s \end{cases} \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R} \begin{cases} s = 1 \\ s = 1 \\ 5,5 + t = 2 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t, k \in \mathbb{R} \begin{cases} s = 1 \\ t = 0,5 \end{cases}$$

Les deux droites admettent donc un unique point d'intersection M (elles sont sécantes) dont on obtient les coordonnées en remplaçant la valeur de t dans la représentation paramétrique de (PQ) (ou de s dans celle de Δ).

(PQ) et Δ sont sécantes en $M(2; 3; 6)$

On a $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PQ}$ donc M n'appartient pas au segment $[PQ]$.

Conclusion : L'oiseau ne va pas percuter l'antenne