BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Remplir la feuille annexe selon les modalités expliquées ci-dessous :

— **Ne pas oublier d'écrire nom, prénom et classe dans le cadre et de noircir le code personnel.**
— Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
— Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève aucun point.
— Noircir proprement, pour chaque question, la case correspondant à la bonne réponse. En cas d'erreur, effacer à l'aide de blanc correcteur en couvrant la case cochée par erreur. Dans ce cas, ne pas reconstituer la case effacée, cela pourrait être considéré comme une bonne réponse.
— **Ne pas glisser le qcm dans la copie mais le rendre séparément.**

Exercice 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x)$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Correction :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 6x = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty\end{array}\right\}\text{ donc, par somme, }\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty.}$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

Correction :

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Correction :

Pour tout $x > 0$, $f(x) = x(x-6) + 4\ln x$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} x - 6 = -\infty\end{array}\right\}\text{ donc, par produit, }\lim\limits_{x\to +\infty} x(x-6) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} 4\ln x = +\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

2. a) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

Correction :

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} = \frac{x(2x-6)+4}{x} = \boxed{\frac{2x^2-6x+4}{x}}$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
En déduire le tableau de variations de f.

Correction :

Sur $]0\,;+\infty[$, $x > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $n(x) = 2x^2 - 6x + 4$ qui est une fonction polynôme du second degré dont les racines sont 1 et 2 (les calculs sont à faire...) et dont le coefficient de x^2 est $2 > 0$.
On en déduit (après calcul de $f(1)$ et $f(2)$) le tableau ci-dessous :

x	0		1		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-8+4\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4\,;5]$.

Correction :

$\left.\begin{array}{l} f \text{ est dérivable donc continue sur } [4\,;5] \\ f \text{ est strictement croissante sur } [4\,;5] \\ f(4) \approx -2{,}45 \text{ et } f(5) \approx 1{,}44 \text{ donc } 0 \in [f(4)\,;f(5)] \end{array}\right\}$ donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4\,;5]$.

4. On admet que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2-4}{x^2}$$

a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Correction :

Pour étudier la convexité de f, on étudie le signe de $f''(x)$.
Pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $x^2 > 0$. $f''(x)$ est donc du signe de $m(x) = 2x^2 - 4$ qui est une fonction polynôme du second degré dont les racines sont $-\sqrt{2}$ (pas dans l'intervalle) et $\sqrt{2}$ et dont le coefficient de x^2 est $2 > 0$.
On en déduit le tableau ci-dessous :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Conclusion : $\boxed{f \text{ est concave sur } \left]0\,;\sqrt{2}\right] \text{ et convexe sur } \left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[.}$

f'' s'annule et change de signe en $\sqrt{2}$ donc $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I pour $x = \sqrt{2}$.

$f\left(\sqrt{2}\right) = 2 - 6\sqrt{2} + 4\ln\sqrt{2}$. Ainsi $\boxed{I\left(\sqrt{2}\,;2 - 6\sqrt{2} + 4\ln\sqrt{2}\right)}$

b) On note A le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\,;f(\sqrt{2})\right)$.

Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$. Soit M le point de coordonnées $(t\,;f(t))$.
En utilisant la question a), indiquer, selon la valeur de t, les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Correction :

— Pour $k \in \left]0\,;\sqrt{2}\right[$, $[AM_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction concave donc $[AM_k]$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$.

— Pour $k \in \left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, $[AM_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction convexe donc $[AM_k]$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1. a) Résoudre sur l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x) = x$.

Correction :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} = x \iff 2x\mathrm{e}^{-x} - x = 0 \iff x(2\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} = 1 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2} \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2) \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{S} = \{0; \ln(2)\}}$

b) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$,

$$f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}$$

Correction :

f est dérivable sur $[0\,;1]$, en tant que composée et produit de fonctions dérivables.
$\forall x \in [0\,;1]$, $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + (2x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x} = \boxed{2(1-x)\mathrm{e}^{-x}}$.

c) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Correction :

Pour tout $x \in [0\,;1]$, $2\mathrm{e}^{-x} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $1-x$ qui est une fonction affine qui s'annule en 1 et de coefficient directeur -1.
On en déduit le tableau ci-dessous :

x	0		1
Signe de $f'(x)$		$+$	0
Variations de f	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$$

Correction :

— Initialisation : On a $u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}1} \approx 0{,}18$ donc $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.
L'inégalité est vraie pour $n = 0$.

— Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $0 \leqslant u_p < u_{p+1} \leqslant 1$.
f est strictement croissante sur $[0\,;1]$ donc $f(0) \leqslant f(u_p) < f(u_{p+1}) \leqslant f(1)$
ainsi $0 \leqslant u_{p+1} < u_{p+2} \leqslant 2\mathrm{e}^{-1} \leqslant 1$.
La propriété est héréditaire.

— Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.}$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Correction :

D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée par 1 donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

Correction :

La suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et on sait que :
$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ est convergente}\\ f \text{ est continue sur } [0\,;1]\end{array}\right\}$ On en déduit que la limite ℓ de (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.
Cette équation admet deux solutions sur $[0\,;1]$: 0 et $\ln 2$.
Or (u_n) est croissante et $u_0 = 0{,}1$ donc $\ell \geqslant 0{,}1$. Ainsi $\ell \neq 0$.
Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)}$

4. a) Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

Correction :

La suite (u_n) est croissante et converge vers $\ln(2)$. On peut donc affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(2)$.
On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n \geqslant 0.}$

b) On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.
Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 0.1
    while ln(2) - u > 0.0001:
        n = n + 1
        u = 2*u*exp(-u)
    return (u, n)
```

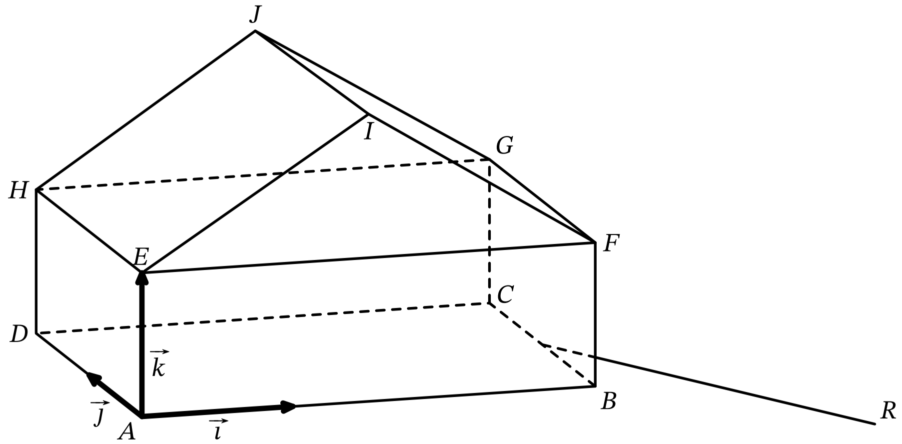
c) Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction `seuil()`.

Correction :

En calculant les termes successifs à la calculatrice (ou en faisant tourner le programme ci-dessous), on trouve : $\boxed{n = 11}$

Exercice 4 — 6 points

Une maison est constituée d'un parallélépipède rectangle *ABCDEFGH* surmonté d'un prisme *EFIHGJ* dont une base est le triangle *EIF* isocèle en *I*.
Cette maison est représentée ci-dessous.



On a $AB = 3$, $AD = 2$, $AE = 1$.
On définit les vecteurs $\vec{\imath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.
On munit ainsi l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$.

1. Donner les coordonnées du point *G*.

Correction :

On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. On a donc $\boxed{G\,(3\,;2\,;1).}$

2. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2\,;0\,;-3)$ est vecteur normal au plan (EHI).
   Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).

Correction :

$\vec{n}\,(2\,;0\,;-3)$ est normal à (EHI) donc une équation cartésienne de (EHI) est de la forme :
$2x - 3z + d = 0$.
De plus $E \in (EHI)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation.
On a donc : $2x_E - 3z_E + d = 0$ donc $2 \times 0 - 3 \times 1 + d = 0$ soit $d = 3$
$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (EHI) \text{ est : } 2x - 3z + 3 = 0.}$

3. Déterminer les coordonnées du point *I*.

Correction :

— *I* est un point du plan (ABE) donc $y_I = 0$.

— *EIF* est un triangle isocèle en *I* donc le projeté orthogonal de *I* sur $[EF]$ est le milieu de $[EF]$. Ainsi $x_I = \frac{3}{2}$.

— $I \in (EHI)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan. On a donc $2x_I - 3z_I + 3 = 0$.
On en déduit $2 \times \frac{3}{2} - 3z_I + 3 = 0$ et donc $z_I = 2$.

Conclusion : $\boxed{I\left(\frac{3}{2}\,;0\,;2\right)}$

4. Déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{EIF}$.

Correction :

— Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF}$ à l'aide des coordonnées.

On a $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF} = -\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}+0+(-1)\times(-1) = -\frac{5}{4}$

— D'autre part, on a : $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF} = IE\times IF\times\cos(\widehat{EIF})$

Comme $IE = IF = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+(-1)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, on peut écrire :

$\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF} = IE\times IF\times\cos(\widehat{EIF}) = \frac{13}{4}\cos(\widehat{EIF})$

On a ainsi : $\frac{13}{4}\cos(\widehat{EIF}) = -\frac{5}{4}$ donc $\cos(\widehat{EIF}) = -\frac{5}{13}$. Conclusion : $\boxed{\widehat{EIF}\approx 113°}$

5. Afin de raccorder la maison au réseau électrique, on souhaite creuser une tranchée rectiligne depuis un relais électrique situé en contrebas de la maison.
Le relais est représenté par le point R de coordonnées $(6\,;-3\,;-1)$.
La tranchée est assimilée à un segment d'une droite Δ passant par R et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$. On souhaite vérifier que la tranchée atteindra la maison au niveau de l'arête $[BC]$.

a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

Correction :

La droite Δ passe par $R\,(6\,;-3\,;-1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de Δ est donc : $\boxed{\begin{cases}x = 6-3t\\ y = -3+4t \qquad t\in\mathbb{R}\\ z = -1+t\end{cases}}$

b) On admet qu'une équation du plan (BFG) est $x = 3$.
Soit K le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (BFG).
Déterminer les coordonnées du point K.

Correction :

$$K(x\,;y\,;z) \in \Delta \cap (BFG) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 6-3t \\ y = -3+4t \\ z = -1+t \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 3 = 6-3t \\ y = -3+4t \\ z = -1+t \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = 1 \\ y = -3+4 = 1 \\ z = -1+1 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Le point d'intersection de Δ et (BFG) a pour coordonnées : $\boxed{K(3\,;1\,;0).}$

c) Le point K appartient-il bien à l'arête $[BC]$?

Correction :

On a : $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$. On constate que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK}$ donc K est le milieu de $[BC]$.

Conclusion : $\boxed{\text{Le point } K \text{ appartient à l'arête } [BC]}$