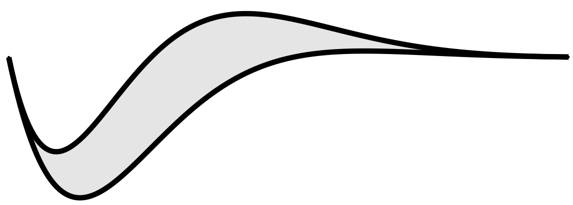
$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o$14 : Intégrales (2h)

I **(7 points)** Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x}\cos x$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude de la fonction f :

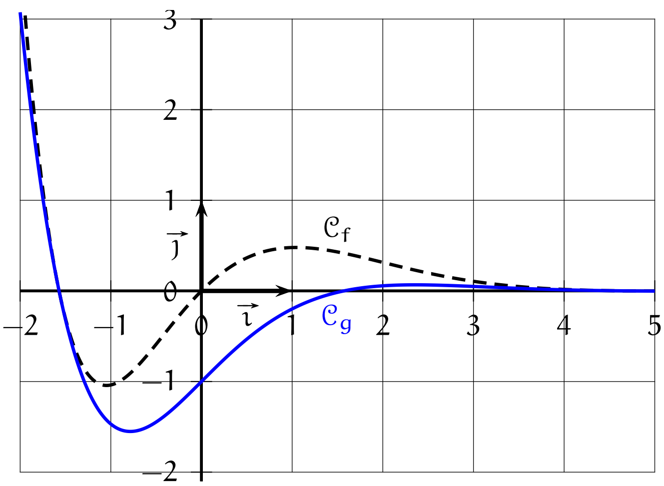
1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{-x}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
   a) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
   b) En déduire les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

Partie B - Aire du logo : On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est de 2 centimètres.

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right) e^{-x}$$

   On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
   a) Montrer que H est une primitive de la fonction $d : x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique.
   c) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm².



(II) **(5,5 points)**
Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

1. a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $e^{-x} \leqslant e^x$.
   b) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et dresser le tableau de variations (complet) de f sur $[0; +\infty[$.
2. Pour n entier naturel, on considère

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$$

   c) En déduire que (I_n) est décroissante.
   d) Montrer que (I_n) converge.

(III) **(8 points)** On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt.$$

1. a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   b) Étudier les variations de la suite (x_n).
   c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   b) En déduire la limite de la suite (x_n).
3. a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1).$$

   b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.
   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to \infty} n y_n$.

(IV✳) Soit g la foncion définie pour tout x strictement positif par

$$g(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{1 + e^{2t}} \, dt$$

On admet que g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1. Déterminer ls fonction dérivée g' de g.
2. Soit $h : x \mapsto g(\tan x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   a) Déterminer la dérivé h' de h.
   b) En déduire que pour tout $x > 0$, on a

$$g(\tan x) = x - \frac{\pi}{4}$$