

# DS 14 (Intégral).

I.  $f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1)$  et  $g(x) = -e^{-x} \cos x$

## Partie A:

1.  $\forall x \in \mathbb{R}: -1 \leq -\cos x \leq 1$   
 $-1 \leq \sin x \leq 1$

Alors par somme des inégalités :  $-2 \leq -\cos x + \sin x \leq 2$   
 et donc  $-1 \leq -\cos x + \sin x + 1 \leq 3$  (+1)  
 et par produit par  $e^{-x}$  avec  $e^{-x} > 0$  on a  $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$ .

2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  (par composée)

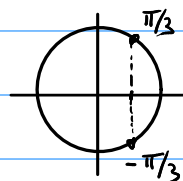
Alors par théorème des gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$

3  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (e^{-x})'(-\cos x + \sin x + 1) + (e^{-x})(-\cos x + \sin x + 1)'$   
 $= -e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x}(\sin x + \cos x)$   
 $= e^{-x}(2\cos x - 1)$

4 a Sur  $[-\pi, \pi]$ :

$e^{-x} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $2\cos x - 1$ .

Et  $2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2}$   
 $\Leftrightarrow x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$



On a alors le tableau de signe pour  $f'(x)$ :

| $x$     | $-\pi$ | $-\pi/3$ | $\pi/3$ | $\pi$ |
|---------|--------|----------|---------|-------|
| $f'(x)$ | -      | 0        | 0       | -     |

4 b On peut donc dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[-\pi, \pi]$

| $x$     | $-\pi$      | $-\pi/3$    | $\pi/3$    | $\pi$       |
|---------|-------------|-------------|------------|-------------|
| $f'(x)$ | -           | 0           | 0          | -           |
| $f(x)$  | $2e^{-\pi}$ | $f(-\pi/3)$ | $f(\pi/3)$ | $2e^{-\pi}$ |

$f(-\pi) = e^{+\pi}(-\cos(-\pi) + \sin(-\pi) + 1) = 2e^{+\pi}$   
 $f(-\pi/3) = e^{-\pi/3}(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1) = e^{-\pi/3}(\frac{1-\sqrt{3}}{2})$   
 $f(\pi/3) = e^{\pi/3}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1) = e^{\pi/3}(\frac{1+\sqrt{3}}{2})$   
 $f(\pi) = e^{-\pi}(-\cos \pi + \sin \pi + 1) = 2e^{-\pi}$

Partie B: 1 La position relative de  $f$  et  $g$  est donnée par le signe de la différence  $d(x) = f(x) - g(x)$

$$= e^{-x} (-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x} \cos x$$

$$= e^{-x} (\sin x + 1)$$

Et sur  $\mathbb{R}$ :  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc  $\sin x + 1 \geq 0$

D'autre part  $e^{-x} > 0$ .

Donc par produit:  $d(x) \geq 0$

Ainsi  $f$  est au-dessus de  $g$ .

2a  $H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right) e^{-x}$ ;  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}; \quad H'(x) = \left(\frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2}\right) e^{-x} + \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right) (-e^{-x})$$

$$= e^{-x} (\sin x + 1)$$

Donc  $H$  primitive de la  $f^p$   $x \mapsto \sin x + 1$

2b En  $-\pi/2$ ,  $d(x) = 0$ , c'est l'intersection de  $f$  et  $g$

2c Sur  $[-\pi/2, 3\pi/2]$ :  $f$  au-dessus de  $g$ , donc l'aire est

$$A = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x) - g(x) dx = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{-x} (\sin x + 1) dx = [H]_{-\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \left(0 + \frac{1}{2} - 1\right) e^{-\frac{3\pi}{2}} - \left(\frac{1}{2} - 1\right) e^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}) \text{ u.a}$$

$$\text{Et } 1 \text{ u.a} = 2^2 \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2 \text{ donc } A = 2(e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}) \text{ cm}^2 \approx 9,60 \text{ cm}^2$$

Exercice II:  $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$

1.a:  $\forall x > 0$ , on a  $-x \leq x$

donc  $e^{-x} \leq e^x$  (car exp croissante sur  $\mathbb{R}$ )

1.b  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ :  $f'(x) = -\frac{(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2}$   
 $= -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$

Et sur  $\mathbb{R}_+$ :  $(e^x + e^{-x})^2 > 0$

•  $e^x - e^{-x} > 0$  d'après 1.a

Donc par quotient et règle des signes:  $f'(x) \leq 0$

De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  alors par quotient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$

On déduit donc le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$

| x    | 0             | $+\infty$ |
|------|---------------|-----------|
| f(x) | $\frac{1}{2}$ | 0         |

2.a D'après le tableau de variations de  $f$ :  $f(x) \geq 0$  sur  $\mathbb{R}_+$

Donc par théorème de positivité sur  $[n, n+1] \subset \mathbb{R}_+$

On a  $I_n \geq 0$

2.b.

Pour  $x \in [n, n+1]$ , on a  $n+1 \geq x \geq n$

donc

$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$  (car  $f$  décroissante)

et par intégration de l'inégalité

avec les bornes dans l'ordre:  $f(n+1) \int_n^{n+1} 1 \cdot dx \leq I_n \leq f(n) \int_n^{n+1} 1 \cdot dx$

donc

$$f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$$

2c. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$   
et aussi  $f(n+2) \leq I_{n+1} \leq f(n+1)$

On déduit donc  $I_{n+1} \leq f(n+1) \leq I_n$  et donc  $(I_n)$  décroissante.

2d.  $(I_n)$  décroissante (2.c) et minorée par 0 (2.a) donc par théorème  $(I_n)$  converge.

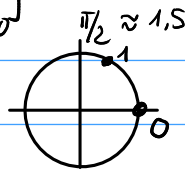
### Exercice III

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt; \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$$

1.a Sur  $[0,1]$ :  $t \geq 0$  et  $\cos t \geq 0$

Donc par produit  $t^n \cos t \geq 0$  sur  $[0,1]$

ainsi par théorème de positivité:  $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$



1.b Pour  $t \in [0,1]$   $t \leq 1$

et comme  $t^n \geq 0$ , on a par produit par  $t^n$ :  $t^{n+1} \leq t^n$

donc par produit par  $\cos t \geq 0$ :  $t^{n+1} \cos t \leq t^n \cos t$   
et par intégration de l'inégalité

avec les bornes dans l'ordre,  $x_{n+1} \leq x_n$

ainsi  $(x_n)$  est décroissante.

1.c  $(x_n)$  décroissante et minorée par 0 donc par théo  $(x_n)$  converge vers  $l \geq 0$

2.a  $\forall t \in [0,1]$ :  $\cos t \leq 1$

donc  $t^n \cos t \leq t^n$  ( $\times t^n$  avec  $t^n \geq 0$ )

et par intégration de l'inégalité

avec les bornes dans l'ordre,  $x_n \leq \int_0^1 t^n \, dt$

$$\text{et } \int_0^1 t^n \, dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

On a donc  $x_n \leq \frac{1}{n+1}$

2b D'après 1.a et 2.a  $\forall n \in \mathbb{N}$   $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$  donc par théorème des gendarmes:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

3.a  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt$

Par parties en posant :  $u = t^{n+1} \quad v' = \cos t$   
 $u' = (n+1)t^n \quad v = \sin t$

On a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left[ t^{n+1} \sin t \right]_0^1 - (n+1) \int_0^1 t^n \sin t \, dt \\ &= \sin 1 - (n+1) y_n \\ &= \underline{\underline{-(n+1) y_n + \sin 1}} \end{aligned}$$

3b On a alors  $\forall n \in \mathbb{N} : y_n = \frac{\sin 1 - x_{n+1}}{n+1}$

Et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = 0$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin 1 - x_{n+1} = \sin 1$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$  ;

donc par quotient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$

3c Avec 3.a On a  $x_{n+1} = -ny_n - y_n + \sin 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc  $ny_n = \sin 1 - x_{n+1} - y_n$

Et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = 0$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ , on déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n = \underline{\underline{\sin 1}}$

**Ex IV:**  $g(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$

1 Soit  $F$  primitive de  $t \mapsto \frac{e^t}{1+e^{2t}}$

Alors  $g(x) = F(\ln x) - F(0)$

donc  $g'(x) = \frac{1}{x} F'(\ln x) = \frac{1}{x} \left( \frac{e^{\ln x}}{1+e^{2\ln x}} \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1+x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}}}$

2a  $h(x) = g(\tan x)$  donc  $h'(x) = (\tan x)' g'(\tan x)$   
 $= (1+\tan^2 x) \cdot \frac{1}{1+\tan^2 x}$   
 $= 1$

2b On a donc  $h(x) = x + K$  où  $K$  constante.  
 et  $h(\frac{\pi}{4}) = g(\tan \frac{\pi}{4}) = g(1) = \int_0^0 \dots dt = 0$

et d'autre part:  $h(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + K$  ; donc  $K = -\frac{\pi}{4}$

Ainsi  $h(x) = x - \frac{\pi}{4}$ , c'est-à-dire :  $\underline{\underline{g(\tan x) = x - \frac{\pi}{4}}}$ .