$\mathcal{DS}$ $\mathcal{N}$°13 : Test intégrales (30 min)

(I) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t+2)\cos t\,dt$$

(II) On considère la suite (I_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$$

1. Montrer que (I_n) est décroissante.
2. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x^n \leqslant x^n e^{x^2} \leqslant e x^n$$

3. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

4. Que peut-on en déduire pour (I_n) ?

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = -\int_0^1 \underbrace{\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}}_{\frac{u'}{u}}\,dx = -\left[\ln(e^{-x}+1)\right]_0^1$$

$$= -\left(\ln(e^{-1}+1) - \ln 2\right)$$

$$= \ln(2) - \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} (t+2)\cos t\,dt$$

par parties :

$u = t+2 \qquad v' = \cos t$

$u' = 1 \qquad v = \sin t$

Alors $I_2 = \left[(t+2)\sin t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt$

$$= \frac{\pi}{2} + 2 - \left[-\cos t\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2 - 1 = \frac{\pi}{2} + 1$$

II $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$.

(1) Pour $x \in [0,1]$, on a $x \leq 1$

et par produit par $x^n \geqslant 0$ on a $x^{n+1} \leq x^n$

et par produit par $e^{x^2} > 0$ on a $x^{n+1} e^{x^2} \leq x^n e^{x^2}$

Alors par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre $I_{n+1} \leq I_n$ donc (I_n) décroissante

(2) Pour $x \in [0,1]$

$0 \leq x^2 \leq 1$ donc $1 \leq e^{x^2} \leq e$ (car exp $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$)

donc $x^n \leq x^n e^{x^2} \leq x^n e$ ($\times x^n$ avec $x^n \geqslant 0$)

(3) Par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre ($0 < 1$) : $\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$

donc $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

(4) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc par théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$