$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}$°12 : Equations différentielles (45 min)

(I) Résouddre : $2y' - 3y = 1$ avec $y(0) = 3$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(II) **Partie A : Cas particulier**

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad y' + y = \cos x.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{2}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B : Généralisation

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad y' + ay = \varphi$$

où φ est unje fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On admet que l'on dispose d'une solution particulière u de l'éqution (E). C'est-à-dire :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$u'(x)' + au(x) = \varphi(x)$$

On note (E_0), l'équation homogène associée (c'est-à-dire sans second membre) :

$$(E_0): \quad y' + ay = 0$$

1. Donner sans aucun type de justification les solutions f de (E_0).
2. Démontrer qu'une fonction v, est solution de (E) si et seulement si il existe f solution de (E_0) telles que $v - u = f$.
3. En déduire le thèorème suivant :

   Théorème. *Les solutions d'une équation différentielle* (E) : $\quad y' + ay = \varphi$, *sont la somme d'une solution particulière de* (E) *et d'une solution générale de* (E_0).

(III✳) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2+x} e^{t^2}\, dt$$

Vous ne chercherez pas à calculer cette intégrale. C'est impossible.
Déterminer la dérivée φ' de φ.