DS12.

Ex 1 : (E) : $2y' - 3y = 1$ et $y(0) = 3$

On a (E) $\Leftrightarrow$ $y' = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$

On reconnait une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.
Par théorème, les solution sont les fonctions f telles que
$f : x \longmapsto Ke^{3/2 x} - \frac{1}{3}$.

De plus $f(0) = 3 \Leftrightarrow K - \frac{1}{3} = 3$ donc $K = \frac{10}{3}$

Finalement (E) admet comme unique solution $f(x) = \frac{10}{3} e^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3}$

II. Partie A. (E) : $y' + y = \cos x$

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) + u(x) = \left(\frac{\sin x + \cos x}{2}\right)' + \frac{\sin x + \cos x}{2}$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{2} + \frac{\sin x + \cos x}{2}$$

$$= \cos x$$

Donc u est solution de (E).

2. (E₀) : $y' = -y$
est une équation de la forme $y' = ay$ et par théorème les solutions de (E₀) sont les fonctions f de la forme :

$f(x) = K e^{-x}$; $K \in \mathbb{R}$

3. On a $v-u$ solution de E_0 $\iff (v-u)'+(v-u)=0$

$\iff v'+v=u+u'$

$\iff v'+v=\cos x$ car u sol de (E)

$\iff v$ solution de (E)

4. D'après 3 : v solution de (E)

$\iff v-u$ solution de E_0

$\iff \exists K\in\mathbb{R}$ tq $v(x)-u(x)=Ke^{-x}$

$\iff v(x)=Ke^{-x}+u(x)$; $K\in\mathbb{R}$

Finalement les solutions de (E) sont les fonctions

$$v(x)=Ke^{-x}+\frac{\sin x+\cos x}{2}$$

5. On veut de plus $v(0)=1$ donc $K+\frac{1}{2}=0$ et $K=-\frac{1}{2}$

La solution f_2 cherchée est $f_2(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{\sin x+\cos x}{2}$

Partie B.

1 E_0 a pour solutions $f(x)=Ke^{-ax}$; $K\in\mathbb{R}$.

2 On a

$f=v-u$ solution de (E_0) $\iff (v-u)'+a(v-u)=0$

$\iff v'+av=au+u'$

$\iff v'+av=\varphi$ (car u sol de (E))

$\iff v$ solution de E.

3 On déduit

v solution de (E) $\iff \exists K\in\mathbb{R}$ tq $v-u=e^{-ax}$

$\iff \exists K\in\mathbb{R}$ tq $v=e^{-ax}+u$

Ce qui veut dire que v est la somme d'une sol° générale de (E_0) $(x\longmapsto e^{-ax})$ et d'une solution particulière de E (u).

III. $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2+x} e^{t^2} dt$

Soit F primitive de $t \longrightarrow e^{t^2}$ (Elle existe car $t \to e^{t^2}$ continue)

Alors $\varphi(x) = [F]_{x}^{x^2+x} = F(x^2+x) - F(x)$

donc $\varphi'(x) = (x^2+x)' F'(x^2+x) - F'(x)$ (par composée)

$$= (2x+1)\, e^{(x^2+x)^2} - e^{x^2+x}$$