BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

21 mars 2024

MATHÉMATIQUES

Série S

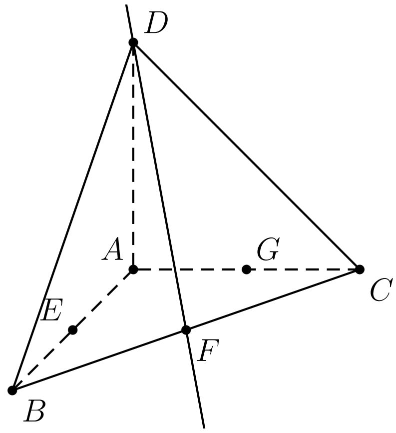
Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 16

Ce sujet comporte 5 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 5

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)



Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).
   a) Donner les coordonnées des points D et F.
   b) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
   d) Calculer les coordonnées du point H.
   e) Démontrer que l'angle $\widehat{\text{EHG}}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{\text{D}M} = t\overrightarrow{\text{DF}}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\text{E}M\text{G}}$ (on a donc $\alpha \in [0; \pi]$).
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   a) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
   Montrer que $M\left(\dfrac{t}{2}; \dfrac{t}{2}; -t+1\right)$ et en déduire $M\text{E}^2 = f(t)$.
   b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{M\text{E}}$.
   c) On admet que α est maximal si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
   En déduire que α est maximal si et seulement si ME est minimal.
   d) Etudiez la fonction f et conclure.

Exercice 2 **(5 points)**

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$,par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire *g*

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

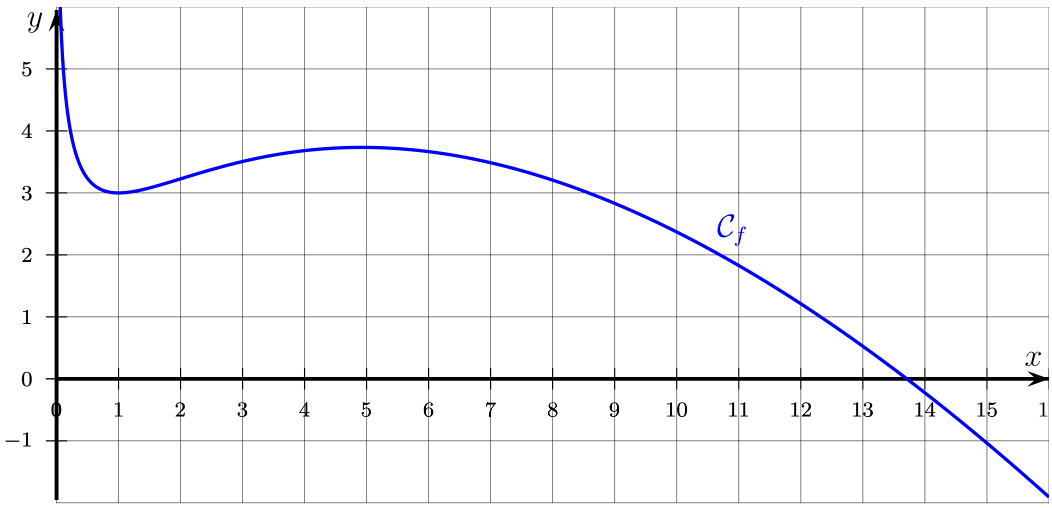
1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
   En déduire le tableau des variations de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\ ;\ +\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.
   On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction *f*

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.
La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ ci-dessous.
On admet que : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2. a) Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
   b) En déduire le tableau des variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$.
   Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 (5 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & v_0 = 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + v_n \end{array}\right.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. a) Calculez u_1 et v_1.
   b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.
   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n + 1$.
   d) En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

   On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

   a) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

   b) En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

   c) Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.
   d) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

   e) On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
 def seuil() :
 n=0
 r=1
 while abs(r-sqrt(2))>10**(-4) :
    r = (2+r)/(1+r)
    n = n+1
return n
```

   (abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 10** (-4) représente 10^{-4}).
   La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
   À quoi correspond-elle ?

Exercice 4 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Il s'agit de remplir la feuille annexe selon les modailités expliquées ci-dessous :

- Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
- Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
- Vous devez **noircir proprement la case pour chaque question**, correspondant à la bonne réponse. Si vous vous trompez, effacez à l'aide de blanco en couvrant la case cochée par erreur. Dans ce cas, **ne reconstituez pas la case effacée, cela pourrait être considéré comme une bonne réponse**
- Pensez à écrire vos noms, prénom et classe dans le cadre et à noircir votre code.