

Ex 1: dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$

$$\begin{aligned} B(1; 0; 0) \\ C(0; 1; 0) \\ D(0; 0; 1) \\ F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \\ H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

1) $D(0; 0; 1)$

@ F milieu de $[BC]$ donc $F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$

@ $\vec{DF} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de (DF)
et $D \in (DF)$

donc $(DF) = \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

9,25
9,25

9,5

@ $\mathcal{P} \perp (DF)$ donc $\vec{DF}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$
alors $\mathcal{P}: \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z + d = 0 \quad (d \in \mathbb{R})$

or $A \in \mathcal{P}$ donc $d = 0$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $x + y - 2z = 0$

9,5

(d) $H \in \mathcal{P}$ et $H \in (DF)$

$$\left(\frac{1}{2}t\right) + \left(\frac{1}{2}t\right) - 2(-t+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t + 2t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$x_H = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = y_H$$

$$z_H = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

9,5

Alors $H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

@ G milieu de $[AC]$ donc $G(0; \frac{1}{2}; 0)$

E milieu de $[AB]$ donc $E\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$

$$\vec{EH} \cdot \vec{GH} = \frac{-1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{-1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{-1}{18} - \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{-2}{18} + \frac{2}{18} = 0$$

$\vec{EH} \perp \vec{GH}$ donc $(EH) \perp (GH)$ et $\widehat{EHG}$ est un angle droit

9,5

2) $M \in (DF); \vec{DM} = t \vec{DF}$ avec $t \in \mathbb{R}, \widehat{EMG} = \alpha$

@ $M(x_M; y_M; z_M) \in (DF)$ donc $M\left(\frac{1}{2}t; \frac{1}{2}t; -t+1\right)$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right) \\ G\left(0; \frac{1}{2}; 0\right) \end{aligned}$$

$$\vec{ME} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ t-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ME^2 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}t\right)^2 + (t-1)^2 \\ &= \frac{(1-t)^2}{4} + \frac{1}{4}t^2 + t^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{t^2}{4} + \frac{5}{4}t^2 - 2t + 1$$

$$= \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4} = f(t)$$

9,5

9,25

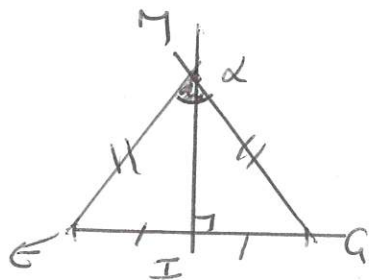
b) $\vec{MG} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t \\ t-1 \end{pmatrix}$

$MG^2 = \left(\frac{1}{2}t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t\right)^2 + (t-1)^2 = ME^2$

donc $MG = ME$

925

le triangle EMG est isocèle en M



(IM) hauteur issue de M et aussi bissectrice de $\widehat{EMG}$.

donc le triangle EMI un angle en I

$\sin(\widehat{EMI}) = \frac{EI}{EM}$

$EI = \frac{1}{2} EG = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{EI}{EM} \quad \left(EG^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \right)$

95

$\Leftrightarrow EM \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow EG = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $x \mapsto \sin x$ strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$
 $\alpha \in [0; \pi]$ donc $\frac{\alpha}{2} \in [0; \frac{\pi}{2}]$
alors α est maximal $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ maximal

changer en 1/2

$\bullet \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{ME} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$ strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$\bullet$ donc $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal quand ME est minimale

$\bullet x \mapsto x^2$ strictement croissante sur $[0; +\infty[$

925

donc ME est minimale quand ME^2 est minimale

au final α maximal $\Leftrightarrow ME^2$ minimal

d) $ME^2 = f(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$

$f'(t) = \frac{3}{4}t - \frac{5}{2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$

95

t	-∞	10/3	+∞
f'(t)	-	0	+

ME^2 est minimal pour $t = \frac{10}{3}$

quand $\widehat{EMG} = \frac{10}{3} \widehat{EM}$

$\alpha = \widehat{EMG}$ sera maximal 928

Ex 2: $f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$

3.

Partie A: $g(x) = 2(x-1) - x \ln x$ sur $]0; +\infty[$

1) $g(1) = 2 \times 0 - 1 \times \ln 1 = 0$

$g(e) = 2(e-1) - e \ln e = 2e - 2 - e = e - 2$

9,25
9,25

2) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par comparaisons
Par somme $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

9,25

3) $g'(x) = 2 - (1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}) = 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$

9,25

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln x \Leftrightarrow e \geq x$
car $x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$

done

x	0	e	+
g'(x)		+	-
g(x)		$e-2$	$-\infty$

on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

9,5

4) Sur $]0; e]$

Sur $[e; +\infty[$

- g continue (car dérivable)
- g strictement croissante

- g continue
- g strictement décroissante

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $g(e) = e - 2 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet :

une seule solution sur $]0; e]$
or $g(1) = 0$ donc c'est 1

une seule solution α sur $[e; +\infty[$

Au total l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0; +\infty[$: 1 et α ($\alpha \geq e$)

5) D'après la question précédente

$\begin{cases} g(4,92) > 0 \\ g(4,93) < 0 \end{cases}$

9,25

x	0	1	α	+
g(x)		-	+	-

done $4,92 < \alpha < 4,93$

Partie B : $f(x) = 3x - x \ln x - 2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$

4

1) on admet que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

$$f(x) = x(3 - \ln x) - 2 \ln x$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \text{Par produit et somme} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \ln x) = -\infty \\ \text{Par produit} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(3 - \ln x) = -\infty \\ \text{Par produit} \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln x = -\infty \end{array}$$

Par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

95

2) @ $f'(x) = 3 - (1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}) - \frac{2}{x}$

$$= 3 - \ln x - 1 - \frac{2}{x}$$

$$= 2 - \ln x - \frac{2}{x}$$

$$= \frac{2x - x \ln x - 2}{x}$$

$$= \frac{2(x-1) - x \ln x}{x} = \underline{\underline{\frac{g(x)}{x}}}$$

95

b) sur $]0; +\infty[$, $x > 0$
donc $f'(x)$ est du signe
de $g(x)$

95

x	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	-
$f(x)$		$+\infty$	3	$f(2)$	$-\infty$

3) on admet que $f''(x) = \frac{2-x}{x^2}$ du signe de $(2-x)$
puisque $x^2 > 0$

x	0	2	$+\infty$
$f''(x)$		+	0 -

95

f est donc convexe sur $]0; 2]$ puis concave sur $[2; +\infty[$

$f''(2) = 0$ et f'' change de signe

donc $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $x=2$

$$f(2) = 6 - 2 \ln 2 - 2 \ln 2 = 6 - 4 \ln 2$$

$A(2; 6 - 4 \ln 2)$

95

Ex 3

5

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{m+1} = u_m + v_m \\ v_{m+1} = 2u_m + v_m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N})$$

On admet que $u_m > 0$ et $v_m > 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$

1) a) $\begin{cases} u_1 = u_0 + v_0 = 2 \\ v_1 = 2u_0 + v_0 = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

0,25

0,25

b) $v_{m+1} - v_m = 2u_m$ or $u_m > 0$ donc $v_{m+1} - v_m > 0$
 et (v_m) strictement croissante
 or $v_0 = 1$ donc $v_m \geq v_0 \geq 1$

0,25

0,25

c) on veut montrer que $u_m \geq m+1$ pour $m \in \mathbb{N}$

0,75

initialisation: pour $m=0$

$u_0 = 1$ et $0+1=1$: $u_0 \geq 0+1$ vrai pour $m=0$

hérédité: soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_m \geq m+1$

or $u_{m+1} = u_m + v_m$ donc $u_m + v_m \geq m+1 + v_m$ et $v_m \geq 1$
 $\Rightarrow u_{m+1} \geq m+2$

vrai au rang $(m+1)$

conclusion: on a montré par récurrence que

$u_m \geq m+1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$

d) $\lim_{m \rightarrow +\infty} (m+1) = +\infty$

Par comparaison

$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = +\infty$

0,5

2) $r_m = \frac{v_m}{u_m}$ ($m \in \mathbb{N}$), on admet que $r_m^2 = 2 + \frac{(-1)^{m+1}}{u_m^2}$

a) $-1 \leq (-1)^{m+1} \leq 1$ or $u_m^2 > 0$ donc $-\frac{1}{u_m^2} \leq \frac{(-1)^{m+1}}{u_m^2} \leq \frac{1}{u_m^2}$

$(-1)^{m+1} = -1$ ou 1

suitant la parité de $(m+1)$

b) par quotient $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_m^2} = 0$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{u_m^2} = 0$
 ($\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = +\infty$)

d'après le théorème des gendarmes

$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{u_m^2} = 0$

0,5

6

c) $r_m^2 = 2 + \frac{(-1)^{m+1}}{u_m^2}$ donc par somme $\lim_{m \rightarrow +\infty} r_m^2 = 2$

$r_m = \frac{v_m}{u_m}$ avec $u_m > 0$ et $v_m > 0$ donc $r_m > 0$

alors $r_m = \sqrt{r_m^2}$ $X = r_m^2$ $\lim \sqrt{X} = \sqrt{2}$

9.75

Par composition $\lim_{m \rightarrow +\infty} r_m = \sqrt{2}$

9.5 d) $r_{m+1} = \frac{v_{m+1}}{u_{m+1}} = \frac{2u_m + v_m}{u_m + v_m} = \frac{u_m(2 + \frac{v_m}{u_m})}{u_m(1 + \frac{v_m}{u_m})} = \frac{2 + r_m}{1 + r_m}$

e) $m = 5$ est le plus petit rang tel que $|r_m - \sqrt{2}| \leq 10^{-4}$

9.25