BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

20 mars 2024

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 16

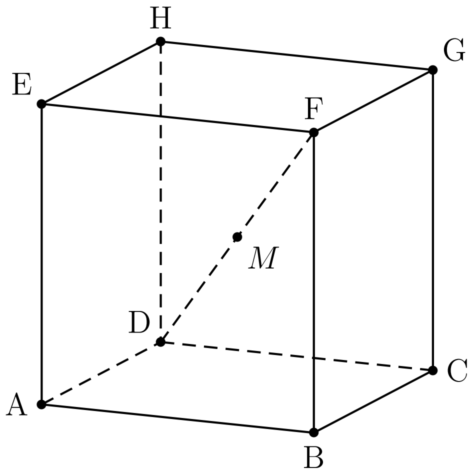
Ce sujet comporte 4 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 4

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{D}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{DH}}\right)$.



Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
   On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, on associe le point M du segment [DF] tel que $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = x\overrightarrow{\mathrm{DF}}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{EMB}}$ lorsque le point M parcourt le segment [DF]. On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?
2. a) Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\ ;\ x\ ;\ x)$.
   b) Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{M\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{M\mathrm{B}}$.
3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction

$$f\ :\ x \longmapsto \frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}.$$

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
Variations de f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

   Pour quelles positions du point M sur le segment [DF] :
   a) le triangle MEB est-il rectangle en M ?
   b) l'angle θ est-il maximal ?

Exercice 2 (5 points)

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

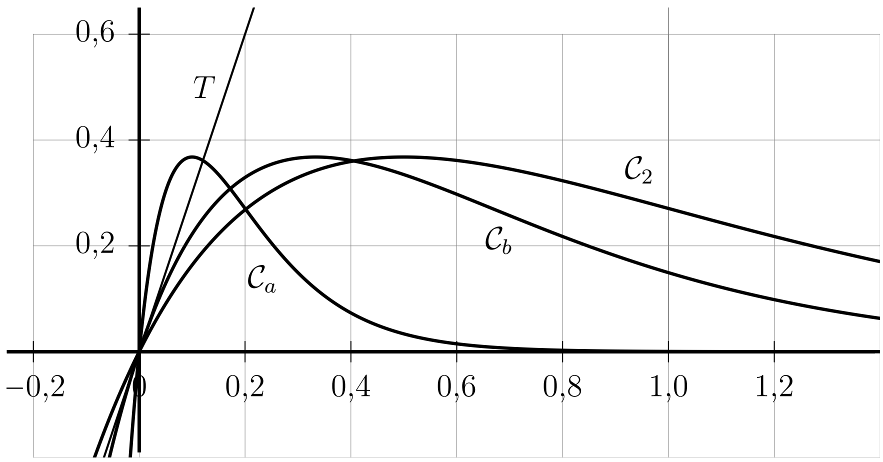
On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point.
2. a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1 - kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$

   b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.
   c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.
   d) Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère.
   e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

Exercice 3 (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

1. a) Calculer u_1 et u_2.
   b) Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée *suite_u* et prend pour paramètre l'entier naturel p.
   Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n).

```
def suite_u(p) :
  u= ...
  for i in range(1,...) :
    u =...
  return u
```

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 4$.
   b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. a) Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.
   b) En déduire la valeur de ℓ.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.
   b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.
   c) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.
5. Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et retrouver $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Il s'agit de remplir la feuille annexe selon les modailités expliquées ci-dessous :

- Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
- Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
- Vous devez **noircir proprement la case pour chaque question**, correspondant à la bonne réponse. Si vous vous trompez, effacez à l'aide de blanco en couvrant la case cochée par erreur. Dans ce cas, **ne reconstituez pas la case effacée, cela pourrait être considéré comme une bonne réponse**
- Pensez à écrire vos noms, prénom et classe dans le cadre et à noircir votre code.