

Ex 1 : Dans le repère orthonormé $(D; \vec{DA}, \vec{DE}, \vec{DH})$

Partie A : 1) $\vec{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{EB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{EQ} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (15)

$E(1; 0; 1)$ |
 $B(1; 1; 0)$ | $\vec{EB}$ et $\vec{EQ}$ ne sont pas colinéaires
 $Q(0; 1; 1)$ | donc E, B et Q définissent bien un
 $M(x; x; x)$ | plan (EBQ) .

$$\begin{cases} \vec{DF} \cdot \vec{EB} = 0 + 1 - 1 = 0 & \vec{m} \perp \vec{EB} \\ \vec{DF} \cdot \vec{EQ} = -1 + 1 + 0 = 0 & \text{et } \vec{m} \perp \vec{EQ} \end{cases}$$

donc $\vec{m}$ est un vecteur normal au plan (EBQ) . 9,75

2) alors $(EBQ): x + y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$
 $E \in (EBQ) \Leftrightarrow 1 + 0 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$ 0,5

Une équation cartésienne de (EBQ) est $x + y + z - 2 = 0$

3) $\vec{DF}$ est un vecteur directeur de (DF) et $D \in (DF)$

donc $(DF): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ on utilise
 $t + t + t - 2 = 0 \Leftrightarrow 3t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$

Donc l'intersection de (DF) et du plan (EBQ) est

$I(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ 1

on admet que $J(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ est l'intersection de (DF) et du plan (AHC)

Partie B : $M \in [DF]$; $\vec{DM} = x \vec{DF}$ avec $x \in [0; 1]$

1) si M est confondu avec le point D , $\widehat{EMB} = \widehat{EDB} = \theta$
 on a $ED = DB = EB$ (arêtes des cubes)

le triangle EDB est équilatéral, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 9,5

si M est confondu avec le point F , $\widehat{EFB} = \widehat{EFB} = \theta$
 $(EF) \perp (FB)$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

2) @ $M(x; x; x)$ 9,25
 $\vec{DM} = x \vec{DF} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x \times 1 \\ y_M = x \times 1 \\ z_M = x \times 1 \end{cases}$ En effet $M(x; x; x)$

$$b) \quad \overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -x \\ 1-x \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-x \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MB} = (1-x)^2 - x(1-x) - x(1-x) = 1 - 2x + x^2 - 2x + 2x^2 = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\text{et } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MB} = ME \times MB \times \cos \theta = ME^2 \times \cos \theta$$

$$ME^2 = MB^2 = (1-x)^2 + x^2 + (1-x)^2 = 2 - 4x + 2x^2 + x^2 = 3x^2 - 4x + 2$$

$$\text{donc } 3x^2 - 4x + 1 = (3x^2 - 4x + 2) \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$$

1

$$3) \quad f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2} \text{ sur } [0; 1]$$

@ Le triangle MEB est rectangle en $M \Leftrightarrow \widehat{EMB} = \pi/2$
 $\Leftrightarrow \cos \theta = 0$
 $\Leftrightarrow f(x) = 0$

D'après le tableau de variations de f
 Le triangle MEB est rectangle en M

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quand } x = 1/3 : \overrightarrow{DM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DF} \\ \text{quand } x = 1 : \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DF}, \text{ } M \text{ et } F \text{ confondus} \end{array} \right.$$

$$\text{quand } x = 1 : \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DF}, \text{ } M \text{ et } F \text{ confondus} \quad 0,5$$

$$b) \quad f(x) = \cos \theta \quad x \mapsto \cos x \text{ est décroissante sur } [0; \pi]$$

donc θ est maximal quand f atteint son minimum :

$$\text{quand } x = 2/3, \quad \overrightarrow{DM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DF} \quad 0,5$$

Ex 2: $f_k(x) = kx e^{-kx}$ sur $\mathbb{R}$ ($k > 0$)

Partie A: $k = 1$ $f_1(x) = x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

1) $f_1(x) = \frac{x}{e^x}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ Par Quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 9,25

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées 9,25
 Par Quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$ 9,25
 L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathbb{R}$ en $+\infty$ 9,25

2) $f_1 = u \cdot v$ $f'_1 = u'v + uv'$
 $f'_1(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$
 $e^{-x} > 0$ donc $f'_1(x)$ est du signe de $(1-x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	$-\infty$	e^{-1}	0

1

Partie B:

1) $f_k(0) = 0$ pour tout $k > 0$ donc $(0,0) \in \mathcal{C}_k$ 9,25

2) @ $f'_k(x) = k e^{-kx} + kx \times (-k e^{-kx}) = k e^{-kx}(1-kx)$ 9,5

③ $k > 0$ et $e^{-kx} > 0$ donc $f'_k(x)$ est du signe de $(1-kx)$

x	$-\infty$	$1/k$	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-

alors f_k strictement croissante sur $]-\infty; 1/k]$ puis décroissante sur $[1/k; +\infty[$

(-k < 0) alors f_k admet un maximum en $x = 1/k$

c'est $f_k(1/k) = k \times \frac{1}{k} \times e^{-k \times 1/k} = e^{-1}$ 1

4

05 (c) par $\mathcal{C}_2$, f_2 atteint son maximum en $1/k$
 par $\mathcal{C}_a$, f_a atteint son maximum en $1/a$
 on a $\frac{1}{a} < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \boxed{a > k}$ ($x \mapsto \frac{1}{x}$ strictement
 décroissante sur $]0, +\infty[$)

05 (d) $y = f'_k(0) \times (x - 0) + f_k(0)$
 $f'_k(0) = k$ et $f_k(0) = 0$ donc $\boxed{y = kx}$ est l'équation
 de la tangente à $\mathcal{C}_k$ en 0.

05 (e) D'après le graphique T a pour coefficient
 directeur $\frac{94}{415} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3} \approx 2,7$ donc $\boxed{b \approx 2,7}$

Ex 3: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n^2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

1) a) $u_1 = \frac{1}{5} u_0^2 = \frac{16}{5}$ et $u_2 = \frac{1}{5} u_1^2 = \frac{1}{5} \times \frac{256}{25} = \frac{256}{125}$

b) def suite-u(p):

$u = 4$

for i in range(1, p+1):

$u = \frac{1}{5} * u * u$

return u

2) a) on veut montrer que $0 < u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

initialisation: pour $n=0$

$u_0 = 4$, on a bien $0 < u_0 \leq 4$ vrai pour $n=0$

hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose que $0 < u_n \leq 4$

$x \mapsto x^2$ strictement croissante sur $[0; +\infty[$

donc $0 < u_n^2 \leq 16 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{5} u_n^2 \leq \frac{16}{5} \quad \frac{16}{5} = 3,2$

or $\frac{16}{5} \leq 4$ donc $0 < u_{n+1} \leq 4$ vrai au rang $(n+1)$

conclusion: par principe de récurrence, on a montré que $0 < u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} u_n^2 - u_n = u_n \left(\frac{1}{5} u_n - 1 \right)$

$\begin{cases} u_n > 0 \\ u_n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} u_n \leq \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} u_n - 1 \leq -\frac{1}{5} < 0$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

c) (u_n) est décroissante et minorée par 0

Par théorème, (u_n) converge vers l . ($0 \leq l \leq 4$)

3) a) par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} u_n^2 = \frac{1}{5} l^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

Par unicité de la limite, $l = \frac{1}{5} l^2$

$$b) \quad l = \frac{1}{5} l^2 \Leftrightarrow l^2 - 5l = 0 \Leftrightarrow l(l-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 5$$

ou (par passage à la limite dans une inégalité) $0 \leq l \leq 5$

alors $\boxed{l = 0}$

9,25

$$4) \quad \begin{cases} v_m = \ln(u_m) \\ w_m = v_m - \ln(5) \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$a) \quad \boxed{v_{m+1} = \ln(u_{m+1}) = \ln\left(\frac{1}{5} u_m^2\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_m^2)}$$

$$= -\ln 5 + 2\ln(u_m) = \boxed{2v_m - \ln 5}$$

9,5

$$b) \quad \boxed{w_{m+1} = v_{m+1} - \ln(5)}$$

$$= 2v_m - \ln(5) - \ln(5)$$

$$= 2v_m - 2\ln(5)$$

$$\text{et } \boxed{w_0 = v_0 - \ln(5)}$$

$$= \ln(u_0) - \ln(5)$$

$$= \ln 4 - \ln 5 = \boxed{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}$$

Donc (w_m) est une suite géométrique de raison 2 de premier terme $w_0 = \ln(4/5)$

pour $m \in \mathbb{N}$

$$= 2(v_m - \ln(5))$$

$$= \boxed{2w_m}$$

9,5

$$c) \quad \text{alors } w_m = w_0 \times 2^m = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^m \quad \text{pour } m \in \mathbb{N}$$

$$\text{et } \boxed{v_m = w_m + \ln 5 = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^m + \ln(5)}$$

9,25

$$5) \quad 2 > 1 \text{ donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} 2^m = +\infty \text{ et } \ln(4/5) < 0 \quad \left(\frac{4}{5} < 1\right)$$

$$\boxed{\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m = -\infty} \text{ par produit et somme}$$

9,25

$$v_m = \ln(u_m) \Leftrightarrow u_m = e^{v_m}$$

$$\text{on pose } X = v_m \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

Par composition

$$\boxed{\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = 0}$$

9,25