T^{ale} 13 mars 2024

$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}$°10 : Proba, suites, fonction (1h)

$\boxed{\text{I}}$ Un site internet propose des jeux en ligne.

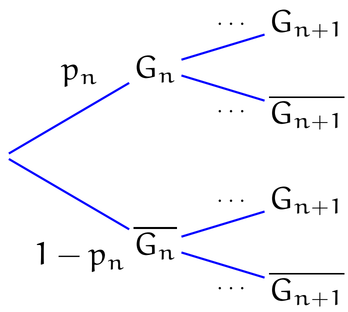
Partie A :

Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\dfrac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$.
3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \dfrac{1}{4}$.
   a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
   b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$.
   c) Déterminer la limite de p_n.

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\dfrac{1}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
   b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
   c) Déterminer l'espérance de X.
2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.

a) Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.

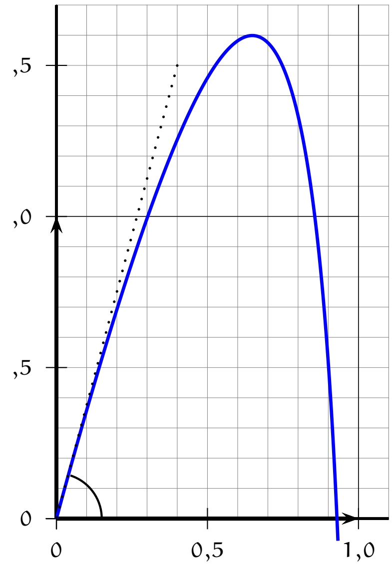
b) Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €. Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

II

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1[$. On note f' sa fonction dérivée.
   On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1[$:
   $$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}.$$
   Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.
2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.
3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.
   L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

III✳

Soit f une fonction paire et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f' est une fonction impaire.