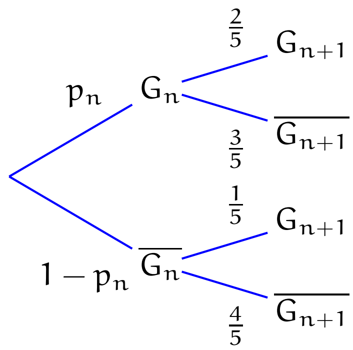
$\mathcal{DS}$ $\mathcal{N}$°10 : Proba, suites, fonction (1h)

I Partie A :

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :
$p_{n+1} = p\left(G_{n+1}\right) = p\left(G_n \cap G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{1}{5}\left(1 - p_n\right) = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$.

3. a) Pour tout n entier naturel non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{1}{4} =$ (d'après la question précédente) $\dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}p_n - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{5}\left(p_n - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{5}u_n$.
L'égalité $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n$ montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

   b) On sait que pour tout naturel supérieur ou égal à 1 : $u_n = u_1 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} =$
$u_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.
Comme $u_n = p_n - \dfrac{1}{4} \iff p_n = u_n + \dfrac{1}{4}$, on a finalement :
$$p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}.$$

   c) Comme $\left|\dfrac{1}{5}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$. Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$.
Au bout d'un très grand nombre de parties, la probabilité de gagner sera proche d'une chance sur quatre.

Partie B :

1. a) Les épreuves étant identiques et indépendantes, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale avec $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

b) On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 1 - \frac{3^{10}}{4^{10}} \approx 0{,}943 \approx 0{,}94$, à 10^{-2} près.

c) On a $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{4} = 2{,}5$.

2. a) Le joueur doit payer 30 € pour les 10 parties et récupérera en moyenne $2{,}5 \times 8 = 20$ €. (espérance de gagner 2,5 parties sur 10).
En moyenne les 10 parties coûteront $30 - 20 = 10$ €, soit 1 € par partie. Le jeu est donc désavantageux.

b) Pour réaliser un bénéfice supérieur à 40 €, vu la mise de 30 €, il faut gagner plus de 70 €. Comme $8 \times 8 = 64$, il faut donc gagner 9 parties au moins sur 10 ($9 \times 8 = 72$).
On a $p(X = 9) + p(X = 10) = \binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 10 \times \frac{3}{4^{10}} + \frac{1}{4^{10}} = \frac{31}{4^{10}} \approx 0{,}000\,029\,56 \approx 0{,}000\,03$.

II

1. Puisque la fonction f est dérivable, et que l'on conna^it sa fonction dérivée, on va étudier le signe de la fonction dérivée pour conna^itre les variations de la fonction f.
Soit x dans $[0\ ;\ 1[$. On a $x < 1$ et donc, $0 < 1 - x$.
Le dénominateur de $f'(x)$ étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur, qui est une quantité affine, de coefficient directeur $-b$ négatif (puisque b est supérieur à 2) et donc on aura bien une fonction dérivée d'abord positive, pour $x \leqslant \frac{b-2}{b}$, puis négative.
On remarque le nombre $\frac{b-2}{b} = 1 - \frac{2}{b}$ est un nombre inférieur à 1 et positif, car b est un réel positif, supérieur à 2.
On peut donc affirmer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{b-2}{b}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{b-2}{b}\ ;\ 1\right[$.
Ces variations indiquent que f atteint un maximum pour $x = \frac{b-2}{b} = 1 - \frac{2}{b}$.
Ce maximum est donc $f\left(1 - \frac{2}{b}\right) = b \times \left(1 - \frac{2}{b}\right) + 2\ln\left(1 - \left(1 - \frac{2}{b}\right)\right) = b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.
Le maximum de la fonction f s'établit bien à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

2. Si on essaye de résoudre l'inéquation $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right) \leqslant 1{,}6$, on se retrouve devant une équation que l'on ne sait pas résoudre de façon exacte.
On peut donc procéder à tâtons, par exploration à la calculatrice pour donner une réponse.
La méthode la plus complète serait la suivante :
Posons m la fonction définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par $m(b) = b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right) = b - 2 + \ln(4) - 2\ln(b)$.
La fonction m est dérivable sur son ensemble de définition et on a pour tout b supérieur à 2 : $m'(b) = 1 - \frac{2}{b}$.
Comme b est supérieur à 2, on en déduit que $m'(b)$ est positif, et même strictement positif pour $b > 2$, et donc que la fonction m est strictement croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

$m(2) = 2 - 2 + \ln 1 = 0$.

S'il y a un réel b_0 tel que $f(b_0) = 1{,}6$, on pourra donc dire que $2 \leqslant b \leqslant b_0 \iff 0 \leqslant m(b) \leqslant 1{,}6$.

Par exploration à la calculatrice, on constate (par exemple) que $m(10) \approx 4{,}8$.

La fonction m étant continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[2\ ;\ 10]$ et 1,6 étant une valeur intermédiaire entre $m(0) = 0$ et $m(10) \approx 4{,}8$, le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre b_0 antécédent de 1,6 par m sur $[2\ ;\ 10]$. Comme m est strictement croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$, il n'y aura pas d'autre antécédent que celui là.

Un balayage à la calculatrice donne $5{,}69 < b_0 < 5{,}70$.

Les valeurs du paramètre b garantissant une hauteur maximale $m(b)$ ne dépassant pas 1,6 mètre sont donc les réels de l'intervalle $[2\ ;\ b_0]$, soit, en donnant une valeur approchée (nécessairement par défaut, vu que m est croissante) de l'intervalle $[2\ ;\ 5{,}69]$.

3. Si on choisit $b = 5{,}69$, alors, cela signifie que la tangente tracée en pointillés est la droite d'équation : $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0) = \dfrac{b-2}{1-0} \times x + 0 = (5{,}69 - 2)x = 3{,}69x$.

   Cela signifie que l'origine du repère, le point de coordonnée $(1\ ;\ 0)$ et le point de coordonnées $(1\ ;\ 3{,}69)$ forment un triangle rectangle, dans lequel le côté opposé à l'angle θ mesure 3,69 et le côté adjacent mesure 1, donc la tangente de l'angle est donnée par $\tan\theta = \dfrac{3{,}69}{1} = 3{,}69$.

   À la calculatrice (réglée en mode degrés), on obtient $\theta = \arctan(3{,}69) \approx 74{,}8°$

III✳ f est une fonction paire et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ et en dérivant et en utilisant la composée, on a alors : $-f'(-x) = f'(x)$ et cela montre que f' est une fonction impaire.