$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}$°9 : Exercice de suites (1h)

I On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2.$$

2. a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b) En déduire la convergence de la suite (u_n).
3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

   c) En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
   d) Calculer la limite de la suite (u_n).
4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.
   Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

   Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2\,024$, alors la suite (u_n) est croissante. »
   Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$. »
   Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

II Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

1. Déterminer f'.
2. Déterminer f''.
3. Étudier les variations de f'. Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de f'.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x$$