$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}$°9 : Exercice de suites (1h)

I On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant e^2.$$

Correction :

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant u_n \leqslant e^2$
Initialisation : On a bien pour $n = 0$: $1 \leqslant u_0 \leqslant e^2$, car $u_0 = 1$.
Hérédité : Pour $k \in \mathbb{N}$, supposons $1 \leqslant u_k \leqslant e^2$
On a :

$$\begin{array}{llcll} & 1 \leqslant & u_k & \leqslant e^2 & \\ \text{Donc} & 1 \leqslant & \sqrt{u_k} & \leqslant e & (\text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante}) \\ \text{Donc} & e \leqslant & e\sqrt{u_k} & \leqslant e^2 & (\text{Par produit avec } e > 0) \\ \text{Donc} & e \leqslant & u_{k+1} & \leqslant e^2 & \end{array}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant u_n \leqslant e^2$

2. a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Correction :

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, donc en l'appliquant à l'inégalité précédente, il vient $1 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant e$ et en particulier $e - \sqrt{u_n} \geqslant 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n})$

et d'après les inégalités précédentes $\sqrt{u_n} \geqslant 0$ et $e - \sqrt{u_n} \geqslant 0$, donc par produit $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Ainsi la suite (u_n) est croissante.

b) En déduire la convergence de la suite (u_n).

Correction :

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par e^2 donc elle converge vers $\ell \in [1; e^2]$

3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Correction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - 2 \\ &= \ln(e\sqrt{u_n}) - 2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2 \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et premier terme $v_0 = \ln u_0 - 2 = -2$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Correction :

D'après ce qui prèceède, on a par propriété :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 q^n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

c) En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

Correction :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_n = \ln(u_n) - 2 &\Longleftrightarrow \ln(u_n) = 2 + v_n \\ &\Longleftrightarrow u_n = e^{2+v_n} \\ &\Longleftrightarrow u_n = e^{2-\frac{1}{2^{n-1}}} \end{aligned}$$

d) Calculer la limite de la suite (u_n).

Correction :

On a $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc par théorème, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$.

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2$ et donc par composée avec la fonction exponenetielle :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^2$$

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.
   Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

   Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2\,024$, alors la suite (u_n) est croissante. »
   Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant e^2$. »
   Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

Correction :

Dans cette question, comme u_0 change, toute la suite change et tout les résultats de la question précédente deviennent caduques. Faire un dessin avec $f(x) = e\sqrt{x}$ et $y = x$, permet d'avoir une bonne vision de ce qu'il se passe pour la suite selon la valeur de u_0.
Affirmation 1 : Si $u_0 = 2\,024$, alors $u_1 = e\sqrt{2024}$ et donc $u_1 < u_0$ donc (u_n) n'est pas croissante.
Affirmation 2 : Si $u_0 = 2$, alors l'Initialisation de la récurence de la partie précédent est valable et donc on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leqslant u_n \leqslant e^2$$

Affirmation 3 : C'est faux, en effet, pour $u_0 = 0$, la suite est stationnaire, mais aussi pour $u_0 = e^2$...

(II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

1. Déterminer f'.
2. Déterminer f''.
3. Étudier les variations de f'. Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de f'.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x$$