$\mathcal{DS}$ $\mathcal{N}$°8 : Espace et QCM général (2h)

I **(9 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(3 ; -2 ; 2), \quad B(6 ; 1 ; 5), \quad C(6 ; -2 ; -1) \quad \text{et } D(0 ; 4 ; -1).$$

1. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Correction :

Je vais exposé e méthode pour cette question : **Méthode 1 :** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

Montrons qu'il n'y a pas de combinaison linéaire nulle non triviale de ces 3 vecteurs :
Soient $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, montrons que si $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = 0$ alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = 0 &\iff \begin{cases} 3\alpha + 3\beta - 3\gamma = 0 \\ 3\alpha \qquad + 6\gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = -2\gamma \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha = -2\gamma \\ -\beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha = -2\gamma \qquad (L_3' = L_1 - L_3) \\ 2\beta = 0 \end{cases} \\
&\iff \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien démontré que $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ non coplanaires et donc A,B,C,D non coplanaires.

Correction :

Méthode 2 : On raisonne par l'absurde : S'ils sont coplanaires, alors il existe α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} ; \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} 3\alpha + 3\beta = -3 \\ 3\alpha \qquad = 6 \\ 3\alpha - 3\beta = 3 \end{cases}$ et on déduit : $\begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$ ce qui est absurde.

Ainsi, les points A,B,C,D ne sont pas coplanaires.

Correction :

Méthode 3 : On détermine des équations paramétriques de (AB) et (CD) et on montre ensuite que ces droites de sont ni parallèles ni sécantes. En conséquence elles sont non coplnaires et les les points non plus.

2. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Correction :

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 9 - 9 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, et donc ABC rectangle en A.

b) Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) .

Correction :

On a $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = -9 + 18 - 9 = 0$ donc $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = -9 + 9 = 0$ donc $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$.
Ceci assure donc que $(AD) \perp (ABC)$.

c) En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

Correction :

$(AD) \perp (ABC)$ donc, dans le tétraèdre $ABCD$, la hauteur issue de D relative à la face ABC est AD.
On déduit donc que

$$\mathscr{V}(ABCD) = \frac{1}{3}\mathscr{A}(ABC)AD$$

où $\mathscr{A}(ABC)$ est la surface du triangle ABC rectangle en A qui vaut $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}AB.AC$.
On a $AB^2 = 27$, $AC^2 = 18$, $AD^2 = 54$,
alors $AB = 3\sqrt{3}$, $AC = 3\sqrt{2}$, $AD = 3\sqrt{6}$.
Donc $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}3\sqrt{3}.3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$ $u.a.$
et donc $\mathscr{V}(ABCD) = \frac{1}{3}.\frac{9\sqrt{6}}{2}.3\sqrt{6} = 27$ $u.v.$

3. On considère le point H(5 ; 0 ; 1).

a) Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$.

Correction :

On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-11\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD} &\Longleftrightarrow \begin{cases} -1 = -6\beta \\ -1 = -3\alpha + 3\beta \\ -4 = -6\alpha - 6\beta \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{6} \\ -1 = -3\alpha + \dfrac{1}{2} \\ -4 = -6\alpha - 1 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{6} \\ \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Donc on a $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$

b) Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Correction :

D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ sont coplanaires et donc $H \in (BCD)$.
Montrons maintenant $(AH) \perp (BCD)$.
On a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.
donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = -6 + 6 = 0$ et $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.
et $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BD} = -12 + 6 + 6 = 0$ et $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BD}$.
ainsi $(AH) \perp (BCD)$ et $H \in (BCD)$ donc H projeté orthogonal de A sur (BCD).

c) En déduire la distance du point A au plan (BCD).

Correction :

De ce qui précède, on déduit $\text{dist}(A, (BCD)) = AH$.
et $AH^2 = 4 + 4 + 1 = 9$, donc $AH = 3$.
Ainsi $\text{dist}(A, (BCD)) = 3 \ u.l.$

4. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.

Correction :

H projeté orthogonal de A sur (BCD), donc dans le tétraèdre ABCD, AH est la hauteur issue de A .
Ainsi, $\mathscr{V}(ABCD) = \frac{1}{3}\mathscr{A}(BCD)AH$
donc $\mathscr{A}(BCD) = \dfrac{3\mathscr{V}(ABCD)}{AH} = \dfrac{3.27}{3} = 27$ u.a.

II **(3 points)** On donne f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{2+\cos 2x}$$

1. Justifier que le domaine de définition est bien $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de période π.
3. Etudier la parité de f.
4. Déterminer la fonction dérivée de f.

Correction :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(2x) \leqslant 1$, et donc par somme on a $2+\cos(2x) \geqslant 1$.
   En conséquence le dénominateur de f ne s'annule pas et le domaine de définition est $\mathbb{R}$.
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \frac{(\sin(x+\pi))^2}{\cos(2(x+\pi))} \\ &= \frac{(-\sin x)^2}{\cos(2x+2\pi)} \\ &= \frac{(\sin x)^2}{\cos(2x)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   Donc f est de ériode π.
3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(\sin(-x))^2}{\cos(-2x)} \\ &= \frac{(-\sin x)^2}{\cos(2x)} \\ &= \frac{(\sin x)^2}{\cos(2x)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   Donc f est paire.
4. Pour tour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1+\cos(2x))2\sin x\cos x - (-2\sin(2x)\sin^2 x)}{(2+\cos(2x))^2} \\
&= \frac{2\sin x((1+\cos(2x))\cos x + 2\sin(2x)\sin x)}{(2+\cos(2x))^2}
\end{aligned}
$$

III✳ Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ des vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux. Montrer qu'ils forment une base du plan.