$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o7$: Espace (0,5h)

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points A$(2\ ;\ -1\ ;\ 0)$ B$(1\ ;\ 0\ ;\ -3)$, C$(6\ ;\ 6\ ;\ 1)$ et E$(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$;
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. a) On veut démontrer que le triangle ABC est rectangle en A ; on a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = -4 + 7 - 3 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est donc rectangle en A.

b) $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 5 - 6 + 12 = 11$.

$\text{BA} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$ et $\text{BC} = \sqrt{5^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{77}$

c) On cherche la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ arrondie au degré.

On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = \text{BA} \times \text{BC} \times \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) &\iff 11 = \sqrt{11} \times \sqrt{77} \times \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\iff 11 = \sqrt{11} \times \sqrt{11} \times \sqrt{7} \times \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\iff \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

La calculatrice donne $\widehat{\text{ABC}} \approx 68°$ au degré près.

2. a) On veut démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).

Un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.

De plus $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 2 \times (-1) - 1 \times 1 - 1 \times (-3) = -2 - 1 + 3 = 0$

et

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 2 \times 4 - 1 \times 7 - 1 \times 1 = 8 - 7 - 1 = 0$

$\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de ce plan et du plan $\mathscr{P}$.

Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

b) On déduit une équation cartésienne du plan (ABC).

Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x - y - z + d = 0$, comme A appartient à ce plan, on a : $5 + d = 0$ soit $d = -5$.

Une équation de (ABC) est donc $2x - y - z - 5 = 0$.

c) On détermine une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{n}$

On a donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{\text{E}M} = t\overrightarrow{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 1 &=& 2t\\ y - 2 &=& -t,\quad t \in \mathbb{R}\\ z - 4 &=& -t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 + 2t\\ y &=& 2 - t,\quad t \in \mathbb{R}.\\ z &=& 4 - t\end{array}\right.$$

d) On démontre que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$.

H correspond à l'intersection du plan (ABC) avec la droite perpendiculaire à (ABC) qui passe par E soit la droite $\mathcal{D}$, les coordonnées de H seront donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - t \\ 2x - y - z - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - t \\ 2(1 + 2t) - (2 - t) - (4 - t) - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - t \\ 6t - 9 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = 4 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.

On va calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5 unités de volume.

$\text{AC} = \sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{66}$ et donc $\mathscr{B} = \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2} = \dfrac{\sqrt{11} \times \sqrt{66}}{2} = \dfrac{11\sqrt{6}}{2}$ $u.a.$

HE est la hauteur de la pyramide et $\overrightarrow{\text{HE}} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

On a par suite $\text{HE} = \sqrt{(-3)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{27}{2}}$ puis

$\mathscr{V} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{11\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{\dfrac{27}{2}} = \dfrac{11 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times 3\sqrt{3}}{3 \times 2 \times \sqrt{2}} = \dfrac{33}{2} = 16{,}5$ $u.v.$