$\mathcal{DS}$ $\mathcal{N}^o$6 : Fonctions et Probabilités (2h)

I (6 points)
Les parties A *et* B *peuvent etre traitées indépendamment*

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :
- ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels ;
- ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :
- 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans.
  Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels ;
- parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

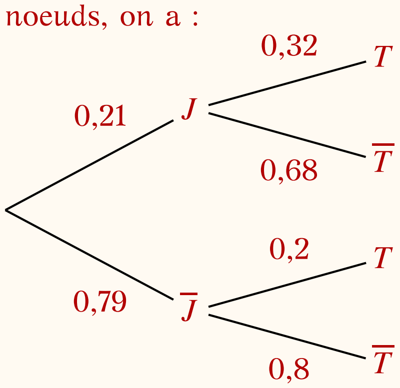
On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.
Dans tout l'exercice on considère les évènements suivants :
- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans » ;
- T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels » ;
- $\overline{J}$ et $\overline{T}$ sont les évènements contraires de J et T.

Partie A

1. Faire un arbre pondéré représentant la situation.

Correction :

D'après l'énoncé et la loi des noeuds, on a :



2. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.

Correction :

On a $P(J \cap T) = P(J)P_J(T) = 0{,}21 \times 0{,}32 = 0{,}0672$

3. Calculer la valeur exacte de la probabilité de T.

Correction :

J, $\overline{J}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(J \cap T) + P(\overline{J} \cap T) \\ &= P(J)P_J(T) + P(\overline{J})P_{\overline{J}}(T) \\ &= 0{,}21 \times 0{,}32 + 0{,}79 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}2252 \end{aligned}$$

4. On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels. Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est 0,30 à 10^{-2} près.

Correction :

On a $P_T(J) = \dfrac{P(J \cap T)}{P(J)} = \dfrac{0{,}0672}{0{,}2252} \simeq 0{,}3$

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux personnes utilisant leur vélo dans leurs déplacements professionnels.

On admet que 30 % d'entre elles ont moins de 35 ans.
On sélectionne au hasard parmi elles un échantillon de 120 personnes auxquelles on va soumettre un questionnaire supplémentaire.
On assimile la sélection de cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.

On demande à chaque individu de cet échantillon son âge.

X représente le nombre de personnes de l'échantillon ayant moins de 35 ans.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

1. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

Correction :

- On a une expérience de Bernoulli qui consiste à choisir un individu au hasard et dont l'issue succés est « L'individu est une personne de moins de 35 ans » avec pour probabilité 0,3.
- On répète 120 fois cette expérience de manière indépendante.

Alors par théorème la bariable X qui compte le nombre de succés suit une loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0{,}3$.

2. Déterminer la probabilité que 30 utilisateurs de vélo parmi les 120 aient moins de 35 ans. Vous donnerz un arrondi à 10^{-3}.

Correction :

$P(X = 30) = \dbinom{30}{120} 0{,}3^{30} 0{,}7^{90} \simeq 0{,}04$

3. Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**(i,n,p) créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```python
def proba(k):
    P=0
    for i in range(0,k+1) :
      P=P+binomiale(i,120,0.3)
return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit `proba(30)` dans la console Python.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Correction :

Le programme est une boucle qui calcule

$$P = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 30) = P(X \leq 30)$$

D'après la calculatrice, on obtient alors : $P = 0{,}136$.
Ceci veut dire que la probabilité d'avoir moins 30 utilisateurs de vélo de moins de 35 ans parmi les 120 est de 0,136.

II (10 points) Les parties B et C sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - x\ln x,$$

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Correction :

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, alors par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction :

On a $f(x) = x(1 - \ln x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1 - \ln x) = -\infty$ alors par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.

   Correction :

   Pour $x > 0$, on a : $f'(x) = 1 - (\ln x + x\dfrac{1}{x}) = -\ln x$

   b) En déduire les variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

Correction :

On a donc
$$f'(x) > 0 \iff -\ln x > 0 \iff \ln x < 0 \iff x \in]0;1[$$
ainsi on déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Correction :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - x\ln x = x \\ &\iff -x\ln x = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

Et f étant définie sur pour $x > 0$, $f(x) = x$ admet $x = 1$ pour unique solution.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0{,}5 \\ u_{n+1} & = & u_n - u_n \ln u_n \quad \text{pour tout entier naturel } n, \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Correction :

On montre par récurrence que pour tout $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

Initialisation : On a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2} \simeq 0{,}8$ donc finalement :

$$0{,}5 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$$

Hérédité : pour $k \in \mathbb{N}$, supposons $0{,}5 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$
On a :

$$\begin{array}{lcccl} & 0{,}5 & \leqslant u_k & \leqslant u_{k+1} \leqslant 1 & \\ \text{Donc} & f(0{,}5) & \leqslant f(u_k) & \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(1) & \text{(car } f \text{ est croissante pour } x \in]0;1]) \\ \text{Donc} & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2} & \leqslant u_{k+1} & \leqslant u_{k+2} \leqslant 1 & \end{array}$$

Et $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} \simeq 0{,}8 \geq 0{,}5$ donc on a $0{,}5 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1$ qui est la propriété au rang $k+1$. et l'hérédité est démontrée.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Correction :

On déduit de la question précédente que (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc par propriété, elle converge vers une limite $\ell \in [0{,}5; 1]$.

b) On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Correction :

On a :

- f est continue sur $[0{,}5; 1]$.
- (u_n) converge vers $\ell \in [0{,}5; 1]$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Donc par théorème du point fixe : $f(\ell) = \ell$ et donc d'après la partie A, $\ell = 1$.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x\ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = \mathrm{e}^{k-1}$.

Correction :

On a : $f_k'(x) = k - \ln x - x\frac{1}{x} = k - 1 - \ln x$,
ainsi pour étudier le signe de f_k', on résout :

$$\begin{aligned} f_k'(x) > 0 &\iff k - 1 - \ln x > 0 \\ &\iff \ln x < k - 1 \\ &\iff x < \mathrm{e}^{k-1} \qquad \text{En applicant la fonction exp qui ext croissante sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

On a alors le tableau de variations :

x	0		e^{k-1}		$+\infty$
$f_k'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
Variations de f	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$f_k(\mathrm{e}^{k-1})$	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, f_k admet un maximum atteint en $x_k = \mathrm{e}^{k-1}$.

2. Vérifier que, pour tout nombre réel k, on a : $x_k = y_k$.

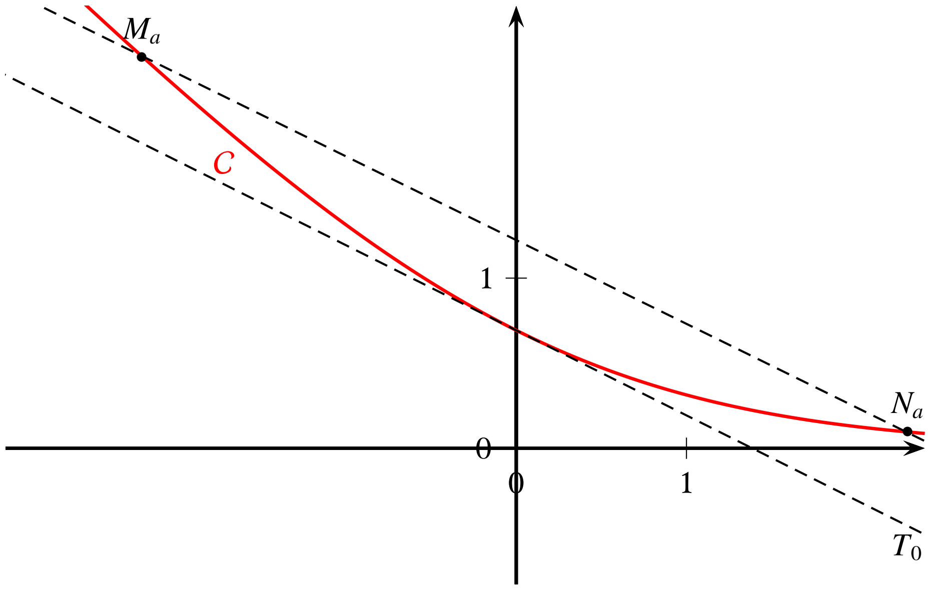
Correction :

On a alors $y_k = f_k(x_k) = k\mathrm{e}^{k-1} - \mathrm{e}^{k-1} \ln \mathrm{e}^{k-1} = k\mathrm{e}^{k-1} - (k-1)\mathrm{e}^{k-1} = \mathrm{e}^{k-1} = x_k$.
Ceci correspond on résultat cherché.

III **(6 points)** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right),$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tracée ci-dessous.



1. a) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1 + e^{x}}$.

Correction :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} \\ &= \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ &= \frac{-1}{e^{x}+1} \qquad \text{(on multiplie numérateur et dénominateur par } e^{x} \end{aligned}$$

2. On note T_0 la tangente à la courbe C en son point d'abscisse 0.

a) Déterminer une équation de la tangente T_0.

Correction :

On a par propriété : $T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Ici $f(0) = \ln 2$, $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, donc :

$$T_0 : y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

b) Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Correction :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x+1)'}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \qquad \text{(En vertu de la formule } \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}\text{)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \end{aligned}$$

Et sur $\mathbb{R}$:

- $\mathrm{e}^x > 0$
- $(\mathrm{e}^x+1)^2 > 0$

Donc par produit pour $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ et donc f est convexe.

c) En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

Correction :

f est une fonction convexe donc par propriété, son graphe est au-dessus de ses tangentes, et donc $\mathscr{C}$ au dessus de T_0. Ceci montre donc que :

$$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe C d'abscisses respectives $-a$ et a.
On a donc : $M_a\,(-a\ ;\ f(-a))$ et $N_a\,(a\ ;\ f(a))$.
a) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.

Correction :

On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) &= \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) - \ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x}+1)}{1+\mathrm{e}^{x}}\right) \\ &= \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= -x \end{aligned}$$

b) En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

Correction :

(M_aN_a) a pour coefficient directeur :

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_{N_a} - y_{M_a}}{x_{N_a} - x_{M_a}} \\ &= \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} \\ &= \frac{-a}{2a} && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Le coefficient de T_0 est aussi $-\frac{1}{2}$ car $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
Donc on a bien (M_aN_a) parallèle (M_aN_a)

IV✳ Déterminer le plus entier naturel n tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \geq 2024$$

Correction :

On a en utilisant la quantité conjugué :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1}^2 + \sqrt{k}^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \\ &= (1-0) + (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} && \text{(C'est une somme télescopique)} \end{aligned}$$

On a donc à résoudre $\sqrt{n+1} \geq 2024$, donc $n = 2024^2 - 1 = 4\,096\,575$