$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o$5 : Ln et compagnie (2h)

I **(11 points)**
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

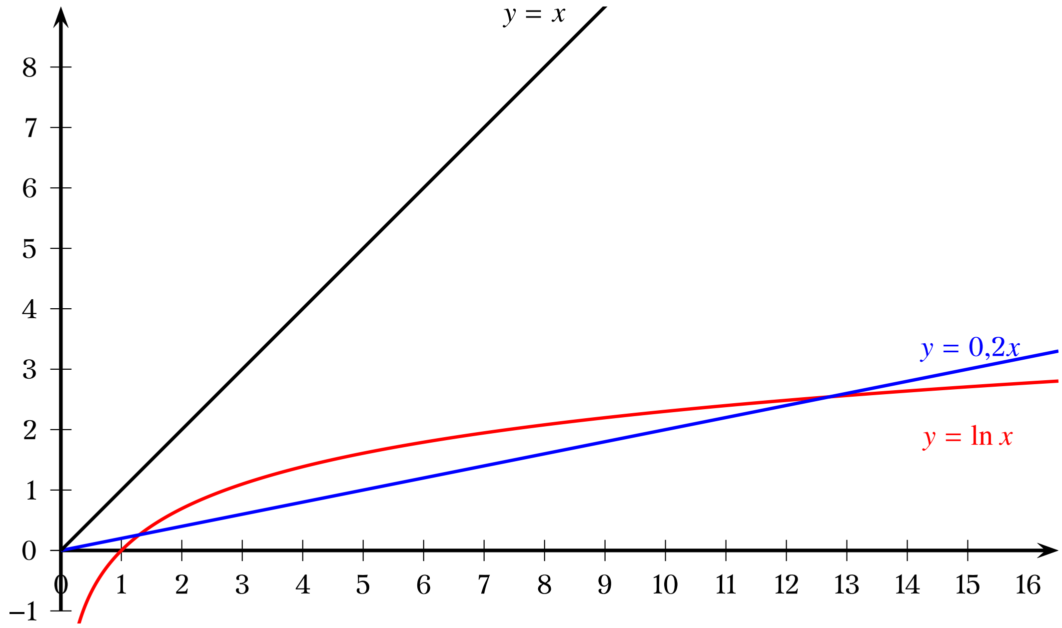
1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. a) On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif :
   $$f'(x) = 1 + \ln(x).$$
   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et les limites.
   c) Justifier que pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$, $f(x) \in]0\ ;\ 1[$.
3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
   b) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   c) En déduire que pour tout réel x strictement positif :
   $$f(x) \geqslant x$$
4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0\,;\,1[$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f(u_n)$$
   a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.
   b) Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).
   c) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite qui satisfait $f(\ell) = \ell$.
   d) On pose φ la fonction définie pour $x > 0$ par $\varphi(x) = f(x) - x$. Après une étude de la fonction φ, dresser son tableau de variation (on ne demande pas les limites).
   e) En déduire la valeur de ℓ.

II **(9 points)** Soit k un réel strictement positif.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation de paramètre k.

$$\ln(x) = kx$$

1. **Conjectures graphiques** :

   On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$d'équation $y = \ln(x)$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 0{,}2x$:
   On notera Δ_k la droite d'équation $y = kx$.



À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ pour $k = 1$ puis pour $k = 0{,}2$, Pouvez-vous donner une évaluation de k lorsque la droite Δ_k est tangente à $\mathscr{C}_{\ln}$?

2. Étude du cas $k = 1$:

   On considère la fonction f, définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x) - x.$$

   a) Calculer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a.
   Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

   b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$.

3. Étude du cas général :

   k est un nombre réel strictement positif.
   On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) - kx.$$

   a) Montrer que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$ $-\infty$

   b) Donner, en fonction du signe de $g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.

   c) Calculer $g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k.

   d) Montrer que $g\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $k < \mathrm{e}^{-1}$.

   e) Déterminer selon les valeurs de k le nombre de solution de l'équation $\ln(x) = kx$.

III✳ Comparer sans calculatrice les nombres e^{π} et π^{e}.