$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o$5 : Ln et compagnie (2h)

I **(11 points)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.

Correction :

- Par théorème de croissance comparée : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$
- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, donc a par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

Correction :

Pour $x > 0$, on a $f'(x) = 1.\ln x + x.\dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et les limites.

Correction :

On cherche le signe de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 1 + \ln x > 0 \\ &\iff \ln x > -1 \\ &\iff x > \mathrm{e}^{-1} \qquad \text{(On applique exp qui est strictement croissante.)} \end{aligned}$$

On a de plus $f(\frac{1}{\mathrm{e}}) = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 \simeq 0{,}63$
On déduit alors le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$			
Variations de f	1	$\searrow$	$1-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c) Justifier que pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$, $f(x) \in]0\ ;\ 1[$.

Correction :

Au vu du tableau de variations et sachant que $f(\frac{1}{\mathrm{e}}) \simeq 0{,}63 > 0$, on déduit que pour $x \in]0\ ;\ \mathrm{e}^{-1}]$ on a $f(x) \in]0;1[$.
D'autre part $f(1) = 1$, et donc pour $x \in [\mathrm{e}^{-1}\ ;\ 1]$, on a $\mathrm{e}^{-1} < x < 1$ et par application de la fonction f qui est croissante, il vient $1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \leq f(x) < 1$. En conséquence $f(x) \in]0;1[$. (on aurait pu aussi le faire directement avec le tableau de variations en y plaçant l'image de 1 par f.
Finalement pour $x \in]0;1[$, on a $f(x) \in]0;1[$.

3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

Correction :

D'après le cours : $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Ici : $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$, donc on a $T : y = x - 1 + 1$ et finalement $T : y = x$.

b) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Correction :

On calcule la dérivée seconde de f : pour $x > 0$: $f''(x) = \frac{1}{x}$.
Donc $f''(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$ et donc f est une fonction convexe.

c) En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geqslant x$$

Correction :

f étant convexe, il s'esnsuit que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes, et donc pour $x > 0$, on a $f(x) \geqslant x$.

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0\,;1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

Correction :

Initialisation : On a bien par définition de u_0 : $0 < u_0 < 1$.
Hérédité : Pour $k \in \mathbb{N}$, supposons $0 < u_k < 1$ donc $u_k \in]0;1[$ et d'après la question 2c, on déduit $f(u_k) \in]0;1[$, c'est-à-dire $0 < u_{k+1} < 1$.
Conclusion : Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

b) Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).

Correction :

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a d'après 3c avec $x = u_k$, on a $f(u_k) \geq u_k$ et donc $u_{k+1} \geq u_k$.
Il s'ensuit que (u_n) est une suite croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite qui satisfait $f(\ell) = \ell$.

Correction :

La suite (u_n) est une suite croissante et majorée par 1, donc par théorème elle converge vers $\ell \in [u_0;1]$.
De plus :

- f est continue sur $[u_0;1]$.
- (u_n) converge vers $\ell \in [u_0;1]$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Donc par théorème du point fixe : $f(\ell) = \ell$.

d) On pose φ la fonction définie pour $x > 0$ par $\varphi(x) = f(x) - x$. Après une étude de la fonction φ, dresser son tableau de variation (on ne demande pas les limites).

Correction :

On a pour $x > 0$, $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \ln x$.
On en déduit le tableau de variations de φ.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de φ	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

e) En déduire la valeur de ℓ.

Correction :

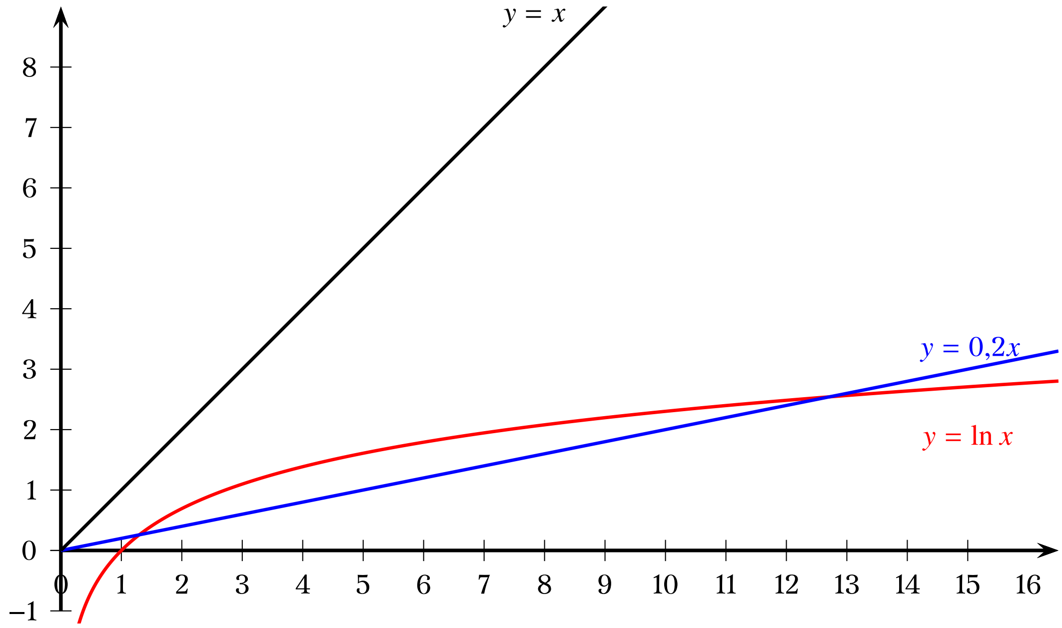
On a $f(\ell) = \ell \iff \varphi(\ell) = 0 \iff \ell = 1$ (d'après le tableau la tabelau de variations).

(II) **(9 points)** Soit k un réel strictement positif.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation de paramètre k.

$$\ln(x) = kx$$

1. **Conjectures graphiques :**

On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$d'équation $y = \ln(x)$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 0{,}2x$:
On notera Δ_k la droite d'équation $y = kx$.



À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ pour $k = 1$ puis pour $k = 0{,}2$, Pouvez-vous donner une évaluation de k lorsque la droite Δ_k est tangente à $\mathscr{C}_{\ln}$?

Correction :

Par lecture graphique Δ_1 et $\mathscr{C}_{\ln}$ ne se coupent pas, $\Delta_{0,2}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ ont deux point d'intersection, et en traçant la tangente, ilsemble que la valeur de k correpondante est de $\dfrac{1}{3}$ environ.

2. Étude du cas $k = 1$:
On considère la fonction f, définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x) - x.$$

a) Calculer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a.
Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

Correction :

On a pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.
$x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ qui est affine et on déduit le tableau de vairations.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖	↗	-1	↘	

b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$.

Correction :

$\ln x = x \Longleftrightarrow f(x) = 0$ et nous observons à l'aide du tableau de variations de f que -1 est son maximum. Ainsi $f(x) = 0$ est impossible et donc il n'y a pas de solution à $f(x) = x$.

3. Étude du cas général :
   k est un nombre réel strictement positif.
   On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) - kx.$$

a) Montrer que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$ $-\infty$

Correction :

Limites : En 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.
En $+\infty$: $g(x) = x(\frac{\ln x}{x} - k)$.
Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et k étant positif, on déduit par produit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
On a pour $x > 0$ $g'(x) = \frac{1}{x} - k = \frac{1-kx}{x}$ et $x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de la fonction $1 - kx$ qui est affine et s'annule en $\frac{1}{k}$.
On a de plus $g(\frac{1}{k}) = \ln\frac{1}{k} - k\frac{1}{k} = -\ln k - 1$.
On déduit alors le tableau de variations demandé.

b) Donner, en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$ le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Correction :

- Si $g\left(\frac{1}{k}\right) < 0$, alors la fonction g a pour maximum un nombre réel strictement négatif, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution.
- Si $g\left(\frac{1}{k}\right) = 0$, alors g admet 0 comme maximum et $g(x) = 0$ admet comme unique solution $x = \frac{1}{k}$.
- Si $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$, d'après le tableau de variations (en appliquant deux fois le corollaire du TVI), on a exactement deux solutions à l'équation $g(x) = 0$. L'une dans $]0; \frac{1}{k}[$ et l'autre dans $]\frac{1}{k}; +\infty[$.

c) Calculer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k.

Correction :

$g(\frac{1}{k}) = \ln\frac{1}{k} - k\frac{1}{k} = -\ln k - 1.$

d) Montrer que $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $k < \mathrm{e}^{-1}$.

Correction :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{k}\right) > 0 &\iff -\ln(k) - 1 > 0 \\ &\iff \ln(k) < -1 \\ &\iff k < \mathrm{e}^{-1} \qquad \text{(On applique exp qui est strictement croissante)} \end{aligned}$$

e) Déterminer selon les valeurs de k le nombre de solution de l'équation $\ln(x) = kx$.

Correction :

En reprenant l'étude de la question 3b, et la question précédente, on déduit que :

- Si $0 < k < \frac{1}{\mathrm{e}}$ alors $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ et donc on a deux solutions à l'équation.
- Si $k = \frac{1}{\mathrm{e}}$ alors $g\left(\frac{1}{k}\right) = 0$ et donc on a une solution à l'équation.
- Si $k > \frac{1}{\mathrm{e}}$ alors $g\left(\frac{1}{k}\right) < 0$ et donc il n'y a pas de solution à l'équation.

III✶ Comparer sans calculatrice les nombres e^{π} et π^{e}.

Correction :

On peut procéder par analyse-synthèse.
Analyse :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\pi} < \pi^{\mathrm{e}} &\iff \pi\ln\mathrm{e} < \mathrm{e}\ln\pi \qquad \text{(Par application de ln aui est croissante)} \\ &\iff \frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}} < \frac{\ln\pi}{\pi} \end{aligned}$$

Ainsi, on constate que notre problème revient à étudier les variations de la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$ pour $x > 0$.
On a alors pour $x > 0$, $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
et donc $\varphi'(x) < 0 \iff 1 - \ln x < 0 \iff x > \mathrm{e}$.
Ainsi pour $x > \mathrm{e}$, φ est croissante et donc $\varphi(e) < \varphi(\pi)$.
Ceci montre $\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}} < \frac{\ln\pi}{\pi}$ et donc $\mathrm{e}^{\pi} < \pi^{\mathrm{e}}$.