T^{ale} *22 novembre 2023*

$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o$4 : Continuité et Suites (2h)

I **(10 points)** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 e^x$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Calculer u_1 puis u_2.
   On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3}.

   b) On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

   On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que `i` varie de 0 à `n -1`.

```
def  fonc (n) :
     u =- 1
     for i in range(n) :
       u=u**3*exp(u)
     return u
```

   Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)` arrondie à 10^{-3}.

2. a) Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2 e^x (x+3)$.

   b) Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous (variations, limites et extremum) :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0	↘	$-27e^{-3}$	↗	$+\infty$

   c) Démontrer, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.$$

   d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   e) On note ℓ la limite de la suite (u_n), montrer que $f(\ell) = \ell$

3. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 e^x$.
   On admet que le tableau de variations de g est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
Variations de g	0	↗	$+\infty$

   a) Montrer que $g(x) = 1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

   b) En déduire la valeur de ℓ.

(II) **(8 points)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-5)(1-e^{-x}).$$

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^{x} + 2x - 7.$$

1. Determiner les limites de g en en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que g admet une unique racine α sur $\mathbb{R}$; donner un encadrement à 10^{-2} de α.
4. En déduire le signe de g.

Partie B :

1. Determiner les limites de f en en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer f' et montrer que

$$f'(x) = g(x)e^{-x}$$

3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$$

Partie C :

1. Soit h définie sur $[0;1]$ par $h(x) = \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$

   On admet que pour $x \in [0;1]$:

$$h'(x) = \frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}$$

   Dresser le tableau de variations de h.
2. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

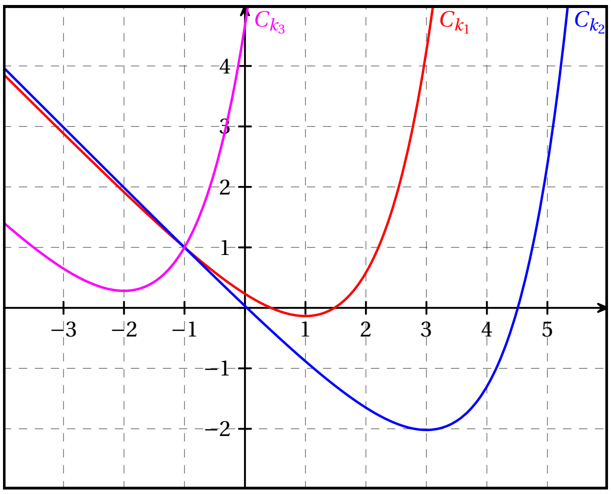
(III) **(2 points)**

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_k par :

$$f_k(x) = e^{x+1-k} - x - e^{-k}$$

Sur le graphique ci-contre, il a été tracé plusieurs courbes $\mathscr{C}_k$ correspondants à f_k pour diverses valeurs de k.

1. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par un même point A que l'on déterminera.
2. Dresser le tableau de variation de f_k (on ne demande pas les limites).
3. Déterminer à l'aide du graphique la valeur de k_1,k_2 et k_3 des 3 courbes représentées.



(IV✳) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ satisfaisant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 = 1$.
Montrer que f est constante.