DS N°4 : Continuité et Suites (2h)

I **(10 points)** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 \mathrm{e}^x$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Calculer u_1 puis u_2.
   On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3}.

   Correction :

   On a $u_1 = f(u_0) = f(-1) = -\mathrm{e}^{-1} \simeq 0{,}368$ et de même $u_2 = (-\mathrm{e}^{-1})^3 \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}} \simeq -0{,}034$.

   b) On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

   On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que `i` varie de 0 à `n -1`.

```
def  fonc (n) :
     u =- 1
     for i in range(n) :
       u=u**3*exp(u)
     return u
```

   Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)` arrondie à 10^{-3}.

   Correction :

   Le script applique 2 fois la fonction f, la valeur renvoyée est donc u_2 et $u_2 \simeq -0{,}034$.

2. a) Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2 \mathrm{e}^x (x + 3)$.

   Correction :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2\mathrm{e}^x + x^3\mathrm{e}^x \\ &= x^2(x+3)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

   b) Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous (variations, limites et extremum) :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0	↘	$-27\mathrm{e}^{-3}$	↗	$+\infty$

   Correction :

   Sur $\mathbb{R}$:
   - $x^2 \geq 0$.

- $e^x > 0$

donc par produit f' est du signe de $x+3$ qui est affine. On en déduit alors le signe voulu pour $f'(x)$.

Limites :

en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, alors par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ par théorème de croissance comparée.

valeur en -3 : $f(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -27e^{-3}$.

c) Démontrer, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.$$

Correction :

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$

Initialisation : On a bien pour $n = 0$: $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 0$.

Hérédité : pour $k \in \mathbb{N}$, supposons $-1 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 0$

On a :

$$\begin{array}{llll} & -1 & \leqslant u_k & \leqslant u_{k+1} \leqslant 0 \\ \text{Donc} & f(-1) & \leqslant f(u_k) & \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(0) \qquad (\text{car } f \text{ est croissante pour } x > -3) \\ \text{Donc} & \dfrac{-1}{e} & \leqslant u_{k+1} & \leqslant u_{k+2} \leqslant 0 \end{array}$$

Et $\dfrac{-1}{e} \geq -1$ donc on a $-1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 0$ qui est la propriété au rang $k+1$. et l'hérédité est démontrée.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Correction :

D'après ce qui précéde, la suite (u_n) est croissante et majorée par 0, donc par théorème, elle converge vers $\ell \leq 0$

e) On note ℓ la limite de la suite (u_n), montrer que $f(\ell) = \ell$

Correction :

On a :

- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) converge vers ℓ
- f continue sur $\mathbb{R}$.

Donc par théorème du point fixe $f(\ell) = \ell$.

3. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 e^x$.
   On admet que le tableau de variations de g est le suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
Variations de g	$0 \nearrow +\infty$

a) Montrer que $g(x) = 1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Correction :

On a sur $\mathbb{R}$:

- g strictement croissante.
- g continue
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ avec $1 \in]0; +\infty[$.

donc par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $g(x) = 1$ admet une unique racine et d'après la calculatrice $\alpha \simeq 0{,}7$.

b) En déduire la valeur de ℓ.

Correction :

On a :

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell \quad &\iff \quad \ell^3 \mathrm{e}^{\ell} = \ell \\ &\iff \quad \ell(\ell^2 \mathrm{e}^{\ell} - 1) = 0 \\ &\iff \quad \ell(g(\ell) - 1) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\ell = 0$ ou $g(\ell) = 1$.
Donc $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha \simeq 0{,}7$ d'après la question précédente.
On sait de plus que $\ell \leq 0$, donc par conséquent $\ell = 0$.

(II) **(8 points)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-5)(1-\mathrm{e}^{-x}).$$

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{x} + 2x - 7.$$

1. Determiner les limites de g en en $+\infty$ et en $-\infty$.

Correction :

Il n'y a pas d'indétermination. Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

2. Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction :

On a $g'(x) = 2\mathrm{e}^{x} + 2$ qui est strictement positive donc g est strictement croissante.

3. Montrer que g admet une unique racine α sur $\mathbb{R}$; donner un encadrement à 10^{-2} de α.

Correction :

On a sur $\mathbb{R}$:

- g strictement croissante.
- g continue
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ avec $0 \in]-\infty; +\infty[$.

donc par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $g(x) = 0$ admet une unique racine et d'après la calculatrice $0{,}94 < \alpha < 0{,}95$.

4. En déduire le signe de g.

Correction :

D'après le tableau de variations, on a alors :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B :

1. Determiner les limites de f en en $+\infty$ et en $-\infty$.

Correction :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-5 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\mathrm{e}^{-x}) = 1$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{-x} = +\infty$ (par composée) et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-\mathrm{e}^{-x}) = -\infty$.
Alors, par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2. Déterminer f' et montrer que

$$f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}$$

Correction :

Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(1-\mathrm{e}^{-x}) + (2x-5)(\mathrm{e}^{-x}) \\ &= 2 - 2\mathrm{e}^{-x} + 2x\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x} - 2 + 2x - 5) \\ &= \mathrm{e}^{-x} g(x) \end{aligned}$$

3. Dresser le tableau de variations de f.

Correction :

Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On déduit donc le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Montrer que

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$$

Correction :

On sait par définition de α que $g(\alpha) = 0$. Donc $2\mathrm{e}^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0$ et en particulier on peut écrire $\mathrm{e}^{\alpha} = \frac{1}{2}(7-2\alpha)$.
On a alors :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (2\alpha-5)(1-\mathrm{e}^{-\alpha}) \\ &= (2\alpha-5)(1-\frac{2}{7-2\alpha}) \\ &= (2\alpha-5)(\frac{7-2\alpha-2}{7-2\alpha}) \\ &= (2\alpha-5)(\frac{5-2\alpha}{7-2\alpha}) \\ &= \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7} \end{aligned}$$

Partie C :

1. Soit h définie sur $[0;1]$ par $h(x) = \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$
   On admet que pour $x \in [0;1]$:
   $$h'(x) = \frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}$$
   Dresser le tableau de variations de h.

Correction :

Sur $[0;1]$:

- $(2x-5) < 0$
- $(2x-9) < 0$
- $(2x-7)^2 > 0$

donc par produit $h'(x) > 0$. Alors, h est croissante sur $[0;1]$.

x	0	1
h'	$+$	
Variations de h	$-\dfrac{25}{7}$ ↗	$-\dfrac{9}{5}$

2. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Correction :

On a d'après ce qui précède :

$$\begin{array}{lllll} & 0{,}94 & \leq \alpha & \leq 0{,}95 & \\ \text{Donc} & h(0{,}94) & \leq h(\alpha) & \leq h(0{,}95) & \text{(Car } h \text{ est croissante)} \\ \text{Donc} & h(0{,}94) & \leq f(\alpha) & \leq h(0{,}95) & \end{array}$$

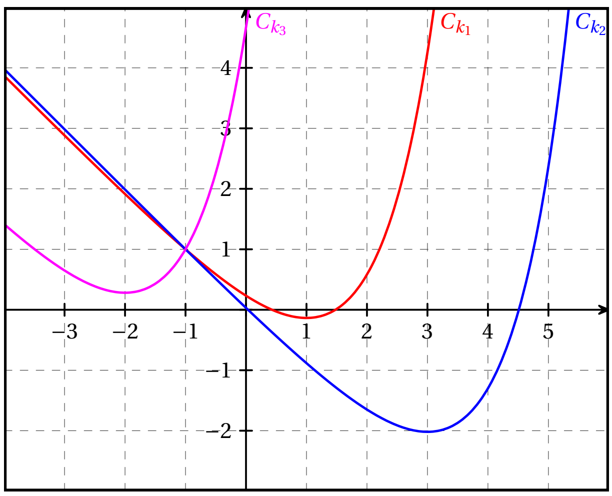
Et à 10^{-2} on a : $-1{,}9 \leq f(\alpha) \leq -1{,}88$

III (2 points)

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_k par :

$$f_k(x) = \mathrm{e}^{x+1-k} - x - \mathrm{e}^{-k}$$

Sur le graphique ci-contre, il a été tracé plusieurs courbes $\mathscr{C}_k$ correspondants à f_k pour diverses valeurs de k.



1. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par un même point A que l'on déterminera.
2. Dresser le tableau de variation de f_k (on ne demande pas les limites).
3. Déterminer à l'aide du graphique la valeur de k_1,k_2 et k_3 des 3 courbes représentées.

Correction :

1. Soit $A(-1;1)$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$:$f_k(-1) = \mathrm{e}^{-k} + 1 - \mathrm{e}^{-k} = 1$ donc $A \in \mathscr{C}_k$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$:$f'_k(x) = \mathrm{e}^{x+1-k} - 1$
   Donc $f'_k(x) > 0 \iff = \mathrm{e}^{x+1-k} > 1 \iff x+1-k > 0 \iff x > k-1$.
   On déduit le tableau de variation de f_k :

x	$-\infty$		$k-1$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	$f_k(k-1)$	$\nearrow$	

avec $f_k(k-1) = \mathrm{e}^0 - (k-1) - \mathrm{e}^{-k} = 2 - k - \mathrm{e}^{-k}$.

3. Le minimum de f_k est en $k-1$. On déduit donc $k_2 - 1 = 3$, $k_1 - 1 = 1$ et $k_3 - 1 = -2$.
   Donc finalement : $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $k_3 = -1$

IV✳ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ satisfaisant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 = 1$.
Montrer que f est constante.

Correction :

Si f est une telle fonction alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(f(x)-1)(f(x)+1) = 0$ et donc $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$.
On raisonne par l'absurde : si f n'st pas constante, alors elle prend deux valeurs distinctes qui sont nécessairement 1 et -1. Donc il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = 1$ et $f(b) = -1$. De plus f étant continue, par le théorème des valeurs intermédiaires elle va devoir prendre toutes les valeurs intermédiaires entre -1 et 1. En particulier il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$. Ceci est absurde car on doit avoir $(f(c))^2 = 1$!