DS N°3 : Limites.

I $f_1(x) = e^{\frac{4}{3x-3}}$; en 1^-

On a :

x		1	
$3x-3$	$-$	0	$+$

Alors $\lim\limits_{x \to 1^-} 3x-3 = 0^-$ donc par quotient : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{4}{3x-3} = -\infty$

De plus $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

Alors par composée (avec $X = \frac{4}{3x-3}$) on a $\lim\limits_{x \to 1^-} f_1(x) = 0$

- $f_2(x) = \dfrac{7x+1}{x^2-2x-3}$

On a $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$ (car 3 racine évidente)

Alors

x		-1		3	
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

(car $a = 1 > 0$)

Donc $\lim\limits_{x \to 3^-} x^2-2x-3 = 0^-$ et comme $\lim\limits_{x \to 3} 7x+1 = 22$

On déduit par quotient : $\lim\limits_{3^-} f_2 = -\infty$

- $f_3(x) = e^x - 3x^4 + x$

$= x^4 \left(\dfrac{e^x}{x^4} - 3 + \dfrac{1}{x^3} \right)$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^4} = +\infty$ par croissance comparée

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x^4} - 3 + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

Donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$

$f_4(x) = x e^{3x}$
$= \frac{1}{3}(3x)\, e^{3x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$; $\lim\limits_{X\to-\infty} X e^X = 0$ par croissance comparée

Alors par composée avec $X = 3x$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x)\, e^{3x} = 0$

Et donc par produit $\lim\limits_{-\infty} f_4 = 0$

II $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Alors $f_1'(x) = (x^2)' e^{-2x} + x^2 (e^{-2x})'$ car $(uv)' = uv' + v'v$

$= 2x\, e^{-2x} + x^2 \cdot (-2) e^{-2x}$ car $(e^u)' = u'e^u$

$= e^{-2x}(2x - 2x^2)$

$= 2x e^{-2x}(1 - x)$

$f_2(x) = e^{\frac{1}{3x-2}}$

Alors $f_2'(x) = \left(\frac{1}{3x-2}\right)' e^{\frac{1}{3x-2}}$ car $(e^u)' = u'e^u$

donc $f_2'(x) = \frac{-3}{(3x-2)^2} e^{\frac{1}{3x-2}}$ car $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

III $f(x) = \frac{2x}{1+e^{2x}}$

1 Pour $x \geqslant 0$; $2x \geqslant 0$ et $1+e^{2x} \geqslant 1$ donc par quotient $f(x) \geqslant 0$

D'autre part : $1 \geqslant 0$
donc $1+e^{2x} \geqslant e^{2x}$ $(+\, e^{2x})$
et par inverse $\frac{1}{1+e^{2x}} \leqslant \frac{1}{e^{2x}}$ (car $x \longmapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

et donc $\frac{2x}{1+e^{2x}} \leqslant \frac{2x}{e^{2x}}$ $(\times\, 2x$ avec $2x > 0)$

Finalement, on a bien : $\forall x \geqslant 0 \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x}{e^{2x}}$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$; $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ (par croissance comparée)

donc par composée avec $X = 2x$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$

Alors par inverse : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$

Alors par théorème des gendarmes : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

IV $g : x \longmapsto x^{16}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 16x^{15}$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = 16$

Ce qui veut dire que $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{16}-1}{x-1} = 16}$