DS N°2 : Suites (1h20)

I (13 point)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

   $$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

   b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.
3. a) Montrer que que, pour tout entier naturel n, on a :

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

   b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

   $$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

   a) Calculer v_0.

   b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

   c) Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n).
   En déduire la limite de (u_n).
5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

   Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil (A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2)/(u + 5)
        n = n + 1
    return n
```

II **(4 points)** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$$

1. Calculer u_1.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq u_n \leq n + 3$$

3. En déduire la limite de (u_n).
4. Déterminer la limite de $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

III **(3 point)** Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 3, u_1 = 6$ et $u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

On définie (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1. Montrer que (v_n) est stationnaire et préciser sa valeur.
2. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$

IV✳ Soit f une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ et une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.

On définit les suites (v_n) et (w_n) des termes de rangs pairs et impairs par :
pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(f(x))$.

1. Exprimer une relation de récurrence pour (v_n) et (w_n) à l'aide de g.
2. Montrer que g est croissante.
3. Montrer que (v_n) et (w_n) sont monotones.
4. Montrer que si (v_n) est croissante alors (w_n) est décroissante (et réciproquement).