DS N°2 : Suites (1h20)

I (13 point)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.

Correction :

On a $u_1 = \dfrac{50}{13}$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

Correction :

On a pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+5)6 - (6x+2)}{(x+5)^2} \\ &= \frac{28}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

Cette dernière expression étant positive, on en déduit $f'(x) > 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ et donc f strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ et en particulier pour $x > 2$, $f(x) > f(2)$.
Comme $f(2) = 2$, on a bien pour $x \geq 2$, $f(x) > 2$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

Correction :

Montrons par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 2$..
Initialisation : $u_0 = 8$ donc la propriété est initialisée.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $u_k > 2$ et montrons $u_{k+1} > 2$.
Comme $u_k > 2$, alors d'après la question précédente $f(u_k) > 2$ donc $u_{k+1} > 2$ et l'hérédité est démontrée.
Conclusion : On a bien pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

3. a) Montrer que que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

Correction :

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= \frac{6u_n + 2}{u_n + 5} - u_n \\ &= \frac{6u_n + 2 - (u_n + 5)u_n}{u_n + 5} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 5} \end{aligned}$$

D'autre part : $(2 - u_n)(u_n + 1) = -u_n^2 + u_n + 2$
Donc on a bien

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Correction :

On sait d'après la question 2b que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 2$,
on déduit donc :

- $2 - u_n < 0$
- $u_n + 1 > 3 > 0$
- $u_n + 5 > 6 > 0$

Et donc par produit :

$$\frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5} < 0$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Correction :

D'après ce qui précéde, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, donc par théorème, elle converge vers $\ell \geq 2$

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

a) Calculer v_0.

Correction :

On $v_0 = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$.

Correction :

On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1} \\
&= \frac{f(u_n)-2}{f(u_n)+1} \\
&= \frac{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5}-2}{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5}+1} \\
&= \frac{\dfrac{6u_n+2-2(u_n+5)}{u_n+5}}{\dfrac{6u_n+2+(u_n+5)}{u_n+5}} \\
&= \frac{4u_n-8}{7u_n+7} \\
&= \frac{4}{7}\frac{u_n-2}{u_n+1} \\
&= \frac{4}{7}v_n
\end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$ avec $v_0 = \dfrac{2}{3}$.

c) Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n).
En déduire la limite de (u_n).

Correction :

On déduit par théorème que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{4}{7}\right)^n$

De plus $-1 < \dfrac{4}{7} < 1$ donc par théorème $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{7}\right)^n = 0$

et on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Mais d'après la définition de (v_n), on a

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

Donc par règles sur les limites :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{\ell - 2}{\ell + 1}.$$

donc

$$\frac{\ell - 2}{\ell + 1} = 0$$

et finalement $\ell = 2$.

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

   Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil (A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2)/(u + 5)
        n = n + 1
    return n
```

Correction :

On vient de voir que (u_n) est décroissante et converge vers $\ell = 2$. Le programme renvoie le rang n à partir du quel $u_n \leq 2{,}001$.
A l'aide d'un tableau à la calculatrice, on obtient $n = 14$.
Cela veut dire que $u_{13} > 2{,}001$ et $u_{14} \leq 2{,}001$.

II **(4 points)** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$$

1. Calculer u_1.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq u_n \leq n+3$$

3. En déduire la limite de (u_n).
4. Déterminer la limite de $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

Correction :

1. $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{5}{2}$.
2. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n \leq u_n \leq n+3$

   Initialisation : On a bien pour $n = 0$: $0 \leq 3 \leq 3$.

   Hérédité : pour $k \in \mathbb{N}$, supposons $k \leq u_k \leq k+3$

   On a :

$$\begin{array}{lcccl}
 & k \leq & u_k & \leq k+3 & \\
\text{Donc} & \frac{1}{2}k \leq & \frac{1}{2}u_k & \leq \frac{1}{2}(k+3) & \text{(par produit par } \frac{1}{2} > 0) \\
\text{Donc} \quad \frac{1}{2}k+1+ & \frac{1}{2}k \leq & \frac{1}{2}u_k + \frac{1}{2}k+1 & \leq \frac{1}{2}(k+3) + \frac{1}{2}k+1 & \text{(par somme de } \frac{1}{2}k+1) \\
\text{Donc} & k+1 \leq & u_{k+1} & \leq k + \frac{5}{2} &
\end{array}$$

   Comme $\frac{5}{2} \leq 4$, on a bien $k+1 \leq u_{k+1} \leq k+4$ et l'hérédité est démontrée.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n \leq u_n \leq n+3$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc à l'aide de l'inégalité précédente et du théorème de comparaison, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
4. En reprenant l'inégalité précédente et en divisant par $n > 0$ on a :

$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{3}{n}$$

   De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$

   donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

III **(3 point)** Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 3, u_1 = 6$ et $u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

On définie (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1. Montrer que (v_n) est stationnaire et préciser sa valeur.

Correction :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} - (u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n) \\ &= \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n+1} - u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi (v_n) est stationnaire et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{21}{4}$

2. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$

Correction :

On a par définition de (v_n), $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ et donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{21}{4} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Ce qui montre que

$$u_{n+1} = \frac{21}{4} + \frac{1}{4}u_n$$

IV✳ Soit f une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ et une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.
On définit les suites (v_n) et (w_n) des termes de rangs pairs et impairs par :
pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(f(x))$.

1. Exprimer une relation de récurrence pour (v_n) et (w_n) à l'aide de g.
2. Montrer que g est croissante.
3. Montrer que (v_n) et (w_n) sont monotones.
4. Montrer que si (v_n) est croissante alors (w_n) est décroissante (et réciproquement).

Correction :

1. On a $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = g(v_n)$.
   De même on a $w_{n+1} = g(w_n)$.
2. Soient $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ alors comme f décroissante $f(a) > f(b)$ et en appliquant f à nouveau, il vient $f(f(a)) < f(f(b))$, c'est-à-dire $g(a) < g(b)$.
   Ceci signifie que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Il s'agit de la même démonstration pour (v_n) et (w_n). Faisons-le pour (v_n).
   Supposons par exemple $v_0 \leq v_1$, on va montrer que dans ce cas (v_n) est croissante.
   Cela se fait par récurrence. L'initialisation est évidente et pour l'hérédité : si pour $k \in \mathbb{N}$

on a $v_k \leq v_{k+1}$, on a par application de g qui ext croissante $v_{k+1} \leq v_{k+2}$
Ainsi l'hérédité est démontrée et nous pouvons conclure que (v_n) est croissante.

Si $v_0 \geq v_1$, alors la même démonstration montre que (v_n) est décroissante.

4. Supposons (v_n) croissante alors :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \leq v_{n+1}$

$$\begin{array}{rcl} & v_n \leq v_{n+1} & \\ \text{donc} & u_{2n} \leq u_{2n+2} & \\ \text{donc} & f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) & \text{car } f \text{ est décroissante} \\ \text{donc} & u_{2n+1} \geq u_{2n+3} & \\ \text{donc} & w_n \geq w_{n+1} & \end{array}$$

donc (w_n) décroissante.
Cela achève l'exercice.