$T^{ale}$ *27 septembre 2023*

# $\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o$1 : Révisions, fonctions et suites (1h)

(I) **(1 point)** Déterminer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

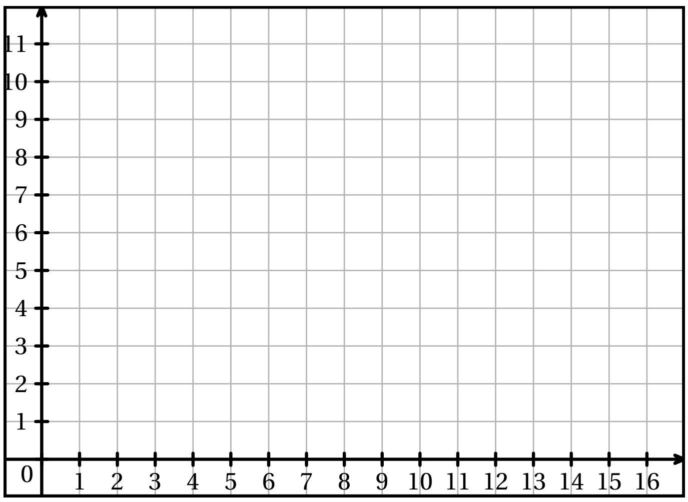
$f_1(x) = \quad (x^3 - 3x^2 + 1)e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$

$f_2(x) = \dfrac{3e^x - 2}{2e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

(II) **(3 points)** On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par :

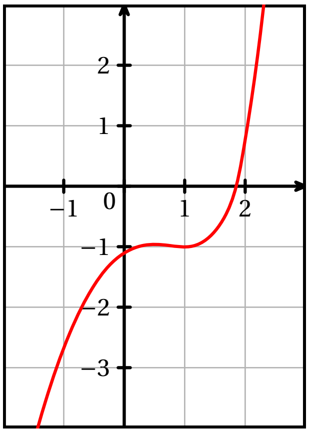
$$\begin{cases} u_1 = 12 & \text{et} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 5 & \text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = \dfrac{1}{3}x + 5$ pour construire (sans calcul) les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$.
   Que peut-on conjecturer à propos de la limite et du sens de variation de la suite $(u_n)$ ?
2. Soit la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par : $v_n = u_n - \dfrac{15}{2}$.
   a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique.
   b) Exprimer alors $v_n$ en fonction de $n$.
   c) Déterminer la limite de la suite $(v_n)$ puis en déduire la limite de la suite $(u_n)$.



**III** **(4 points)**

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)e^{x-1} - x^2 + x$. On a tracé sur le graphe ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de $f$.




1. Au vu de ce graphique, quelle conjecture peut-on faire sur les variations de $f$ ?
2. On introduit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (e^{x-1} - 1)(2x - 1)$$

   Dresser le tableau de signe de $g$.
3. a) Montrer que pour tout $f' = g$, et en déduire le tableau de variations de $f$.

   b) Que dire alors de votre conjecture ?
4. On note $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0. Déterminer l'équation réduite de $\mathscr{T}$.

**IV** **(2 points)** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = 3^n + n$.

**V✳** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $a > 1$, on a :

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} \leq na^{n-1}$$