$\mathscr{DS}$ $\mathscr{N}^o$1 : Révisions, fonctions et suites (1h)

(I) **(1 point)** Déterminer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f_1(x) = \quad (x^3 - 3x^2 + 1)e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$

$f_2(x) = \dfrac{3e^x - 2}{2e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

Correction :

On a

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= (3x^2 - 6x)e^{-2x} + (x^3 - 3x^2 + 1)(-2)e^{-2x} \\ &= (-2x^3 + 9x^2 - 6x - 2)e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{3e^x(2e^x + 1) - (3e^x - 2)2e^x}{(2e^x + 1)^2} \\ &= \frac{7e^x}{(2e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

(II) **(3 points)** On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 &= 12 & \text{et} \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}u_n + 5 & \text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = \dfrac{1}{3}x + 5$ pour construire (sans calcul) les quatre premiers termes de la suite (u_n).
   Que peut-on conjecturer à propos de la limite et du sens de variation de la suite (u_n) ?

   Correction :

   Avec le tracé, on conjecture que (u_n) décroissante et qu'elle semble converger vers $7,5$.

2. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par : $v_n = u_n - \dfrac{15}{2}$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Correction :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{15}{2} \\ &= \frac{1}{3}u_n + 5 - \frac{15}{2} \\ &= \frac{1}{3}u_n - \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 3\frac{5}{2}) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ avec $v_1 = u_1 - \frac{15}{2} = \frac{9}{2}$

b) Exprimer alors v_n en fonction de n.

Correction :

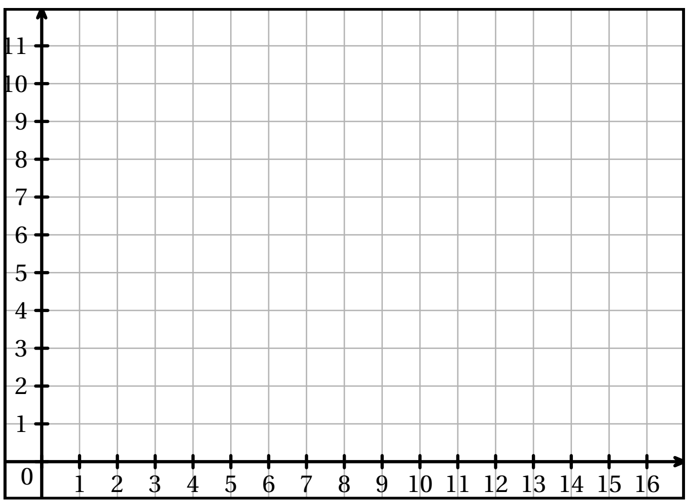
Alors par théorème pour $n \in \mathbb{N}^{\star}$, $v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

c) Déterminer la limite de la suite (v_n) puis en déduire la limite de la suite (u_n).

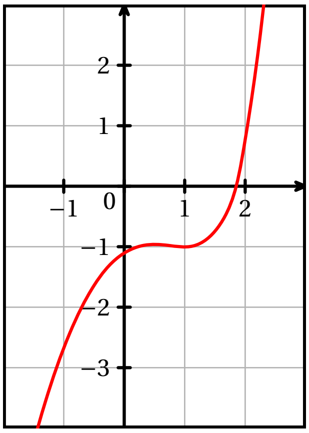
Correction :

Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Alors comme pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = u_n - \frac{15}{2}$, on déduit $u_n = v_n + \frac{15}{2}$ et d'après les règles sur les limites, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{15}{2}$.



$\boxed{\text{III}}$ **(4 points)**



Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)e^{x-1} - x^2 + x$. On a tracé sur le graphe ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.

1. Au vu de ce graphique, quelle conjecture peut-on faire sur les variations de f ?
2. On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = (e^{x-1} - 1)(2x-1)$$
Dresser le tableau de signe de g.
3. a) Montrer que pour tout $f' = g$, et en déduire le tableau de variations de f.
   b) Que dire alors de votre conjecture ?
4. On note $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0. Déterminer l'équation réduite de $\mathscr{T}$.

Correction :

1. Au vu du graphique, on conjecture que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. On va faire un tabelau de signe mais il nous faut le signe de $e^{x-1} - 1$.

$$\begin{aligned} e^{x-1} - 1 \geq 0 &\iff e^{x-1} \geq e^0 \\ &\iff x - 1 \geq 0 \qquad \text{(Car exp est strictement croissante)} \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$e^{x-1} - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{x-1} + (2x-3)e^{x-1} - 2x + 1 \\ &= e^{x-1}(2x-1) - (2x-1) \\ &= (2x-1)(e^{x-1} - 1) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Et ainsi l'égalité est démontrée.

On déduit alors le tableau de variations de f :

On a $f(1) = -1$ et

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\\
&= 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\\
&\simeq -0,96
\end{aligned}
$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

b) Il en ressort que notre conjecture était incorrecte.

IV **(2 points)** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3^n + n$.

Correction :

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3^n + n$.
Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $3^n + n = 1$. La propriété est initialisée.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_k = 3^k + k$, et montrons que $u_{k+1} = 3^{k+1} + k + 1$
On a :

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} &= 3u_k - 2k + 1 && \text{Par définition de } (u_n)\\
&= 3 \times (3^k + k) - 2k + 1 && \text{Par hypothèse de récurrence}\\
&= 3^{k+1} + k + 1
\end{aligned}
$$

L'hérédité est donc démontrée.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3^n + n$.

V✶ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $a > 1$, on a :

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} \leq na^{n-1}$$

Correction :

On a $\dfrac{a^n - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$
D'autre part : pour tout i entre 0 et $n - 1$ on a puisque $a > 1$
$a^{n-1-i} \geq 1$ et donc $a^{n-1} \geq a^i$

on a donc $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} \leq na^{n-1}$. Ceci montre le résultat.