

## Devoir n° 14. Mini épreuve blanche

Vous devez traiter l'exercice (I), le (II) ou le (III) et le (IV) ou le (V)

### (I) (8 points)

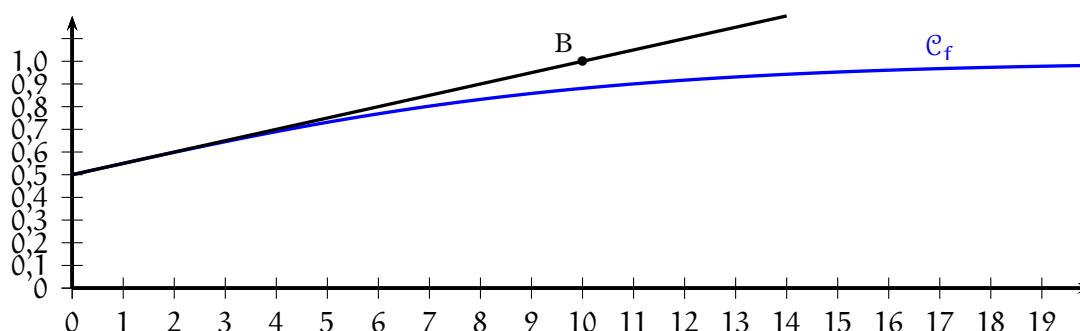
#### Partie A

Soit  $a$  et  $b$  des nombres réels. On considère une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}.$$

La courbe  $\mathcal{C}_f$  représentant la fonction  $f$  dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe  $\mathcal{C}_f$  passe par le point  $A(0 ; 0,5)$ . La tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  passe par le point  $B(10 ; 1)$ .



1. Justifier que  $a = 1$ .

On obtient alors, pour tout réel  $x \geq 0$ ,

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}.$$

2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

Vérifier que, pour tout réel  $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}.$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer  $b$ .

#### Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction  $p$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}.$$

Le réel  $x$  représente le temps écoulé, en année, depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2000.

Le nombre  $p(x)$  modélise la proportion d'individus équipés après  $x$  années.

Ainsi, pour ce modèle,  $p(0)$  est la proportion d'individus équipés au 1<sup>er</sup> janvier 2000 et  $p(3,5)$  est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

- Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1<sup>er</sup> janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
- Déterminer le sens de variation de la fonction  $p$  sur  $[0 ; +\infty[$ .
  - Calculer la limite de la fonction  $p$  en  $+\infty$ .
  - Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
- On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé. Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

**II (8 points)** Les parties A et B sont indépendantes :

**Partie A**

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour un entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $A_n$  et  $B_n$  les événements :

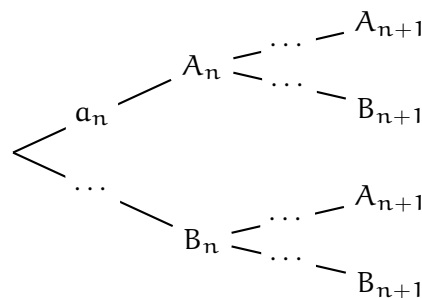
$A_n$  : « la  $n$ -ième partie est une partie de type A. »

$B_n$  : « la  $n$ -ième partie est une partie de type B. »

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $a_n$  la probabilité de l'évènement  $A_n$ .

1. a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre.
- b) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$



Dans la suite de l'exercice, on note  $a$  la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où  $a$  est un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0 ; 1]$ . La suite  $(a_n)$  est donc définie par :  $a_1 = a$ , et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ .

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que  $a = 0,5$ .

- a) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $0 \leq a_n \leq 0,6$ .
  - b) Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante.
  - c) Montrer que la suite  $(a_n)$  est convergente et préciser sa limite.
3. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel  $a$  appartient à l'intervalle  $[0 ; 1]$ . On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par  $u_n = a_n - 0,6$ .
- a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique.
  - b) En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  
$$a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6.$$
  - c) Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$ . Cette limite dépend-elle de la valeur de  $a$  ?
  - d) La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B. Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

**Partie B :**

Une entreprise de peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. On constate que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,8763.

1. Le responsable qualité du site choisit au hasard 50 peluches, de manière indépendante. On appelle  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre peluches de cet échantillon qui ne seront pas acceptées à l'issue des tests.
  - a) Quelle est la loi suivie par  $X$  ? Justifier.
  - b) Calculer  $P(X = 6)$  puis  $P(X > 10)$ .
2. Le responsable qualité du site choisit au hasard  $n$  peluches, de manière indépendante.
  - a) Déterminer la probabilité  $p_n$  que cet échantillon contienne au moins une peluche qui ne sera pas acceptée à l'issue des tests.
  - b) En résolvant une inéquation, déterminer  $n$  pour que :  $p_n \geq 0,99$ .

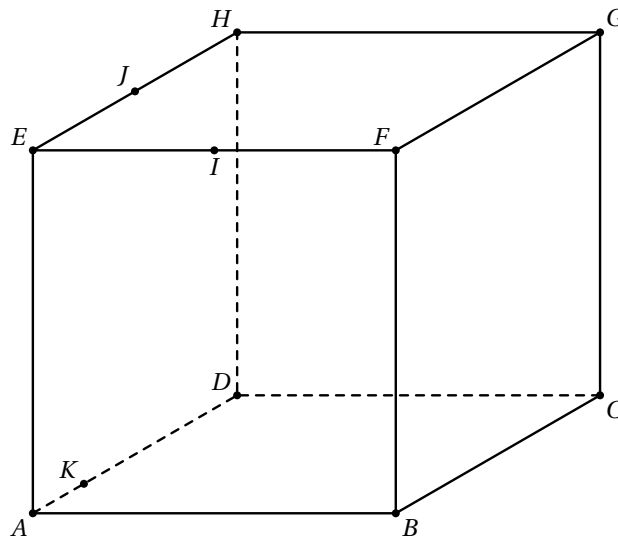
**III (8 points)** On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée ci-dessous.

On note I le milieu du segment [EF], J le milieu du segment [EH] et K le point du segment [AD] tel que  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ .

On note  $\mathcal{P}$  le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

On munit l'espace du repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Donner, sans justifier, les coordonnées de tous les points de la figure.
2. a) Déterminer les réels a et c tels que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$  soit un vecteur normal au plan (FHK).  
 b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FHK) est :  $4x + 4y - 3z - 1 = 0$ .  
 c) Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$ .  
 d) Donner une représentation paramétrique de la droite (AE).  
 e) Calculer les coordonnées du point M, point d'intersection du plan  $\mathcal{P}$  et de la droite (AE).  
 f) Placer le point M puis tracer le plan  $\mathcal{P}$  sur la figure ci-dessous.
3. On note  $\Delta$  la droite passant par le point E et orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ .  
 a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ .  
 b) Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite  $\Delta$  et du plan  $\mathcal{P}$ .  
 c) Calculer la distance du point E au plan  $\mathcal{P}$ .  
 d) Les droites  $\Delta$  et (BF) sont-elles sécantes ? Qu'en est-il des droites  $\Delta$  et (CG) ? Justifier.



**IV (4 points)**

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
3. a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. Soit  $\ell$  sa limite.  
 b) Montrer que  $\ell$  est solution de l'équation  $xe^{-x} = x$ .  
 Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

**Ⓟ (4 points)**

On définit les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  pour tout entier naturel  $n$  par :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \quad \text{et } a_0 = 0$$

et

$$b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \quad \text{et } b_0 = 12$$

**Partie A**

1. On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_n = b_n - a_n$ .
  - a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique. En préciser la raison.
  - b) Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de l'entier naturel  $n$ .
  - c) Déterminer la limite de  $(u_n)$ .
2. a) Démontrer que la suite  $(a_n)$  est croissante (on pourra utiliser le signe de  $u_n$ ).  
b) Étudier les variations de la suite  $(b_n)$ .

**Partie B**

1. On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$v_n = 3a_n + 4b_n.$$

Montrer que la suite  $(v_n)$  est constante.

2. En déduire les formes explicites de  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .