

**Devoir n° 12 Fonctions (1h30)**

---

**I****Partie I**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x - e^{-2x}.$$

On appelle  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ , dont on donnera une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.
4. Dédurre des questions précédentes le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**Partie II**

Dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = e^{-x}.$$

La courbes  $\mathcal{C}$  et la courbe  $\Gamma$  (qui représente la fonction  $f$  de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie**.

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe  $\mathcal{C}$  le plus proche de l'origine  $O$  du repère et d'étudier la tangente à  $\mathcal{C}$  en ce point.

1. Pour tout nombre réel  $t$ , on note  $M$  le point de coordonnées  $(t; e^{-t})$  de la courbe  $\mathcal{C}$ .  
On considère la fonction  $h$  qui, au nombre réel  $t$ , associe la distance  $OM$ .

a) Justifier que

$$h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$$

b) Montrer que, pour tout nombre réel  $t$ ,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

où  $f$  désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

- c) Démontrer que le point  $A$  de coordonnées  $(\alpha; e^{-\alpha})$  est le point de la courbe  $\mathcal{C}$  pour lequel la longueur  $OM$  est minimale.

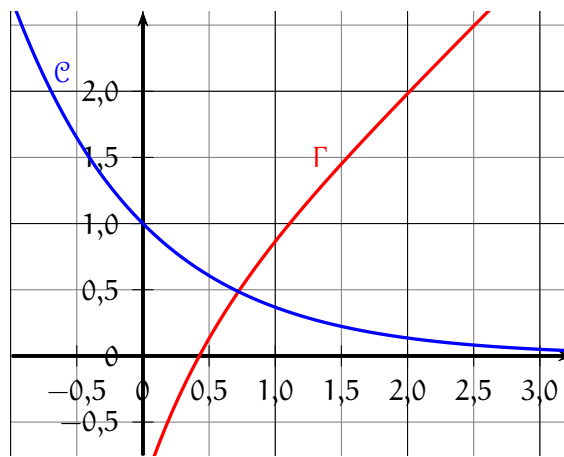
Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle  $T$  la tangente en  $A$  à la courbe  $\mathcal{C}$ .

a) Exprimer en fonction de  $\alpha$  le coefficient directeur de la tangente  $T$ , puis donner un vecteur directeur de  $T$ .

b) Démontrer que la droite  $(OA)$  et la tangente  $T$  sont perpendiculaires.

Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.



Ⓐ On pose pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$$

1. a) Montrer que pour tout  $x \in [1; e]$  on a

$$x^2 (\ln x)^{n+1} < x^2 (\ln x)^n$$

b) En déduire que  $(I_n)$  est décroissante.

2. a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n > 0$ .

b) En déduire que  $(I_n)$  est convergente. On note  $\ell$  la limite de  $(I_n)$ .

3. On admet (jusqu'à la prochaine question) que pour tout entier naturel  $n$  :

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$$

En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

4. \* En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité de la question précédente, c'est-à-dire, pour tout  $n$  :

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$$

Ⓑ On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_1 = -6$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$ .

- Sur le graphique ci-joint, représenter les premiers termes de la suite  $(u_n)$  sur l'axe des abscisses. En déduire une conjecture sur la monotonie de  $(u_n)$  et sur son éventuelle limite.
- Soit la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel non nul  $n$ , par  $v_n = u_n - 4$ .
  - Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
  - Donner l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ , puis en déduire celle de  $(u_n)$ .  
pour tout entier naturel  $n$ .
  - En déduire la limite de  $(u_n)$ .
- Déterminer la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle  $u_n > 3,999$ .

