Devoir n° 7 : Ln et compagnie (2h)

I (9 points)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. a) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.
   b) En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, complété par les limites.
   c) Justifier que pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. Donner la valeur de ℓ.

II (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en 0, on veillera à établir auparavant que pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = x + 4 - \frac{1}{x}(4x\ln(x) + 3)$$

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

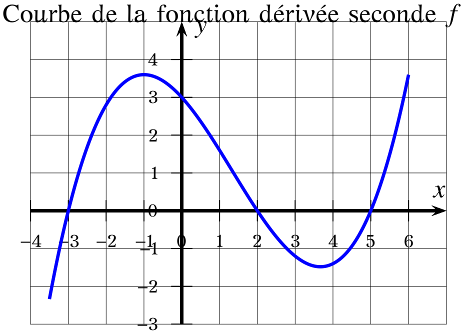
4. a) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
      On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b) Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$.
   c) Montrer que l'équation $f(x) = \mathrm{e}$ admet une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
5. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.
   On justifiera que la courbe C admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

III (4 points)Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM)

Pour chaque question, des affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.
Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci.
Aucune justifiacation n'est demandée. *Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.*

1. On donne ci-dessous la courbe $C_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3,5\ ;\ 6]$.

Courbe de la fonction dérivée seconde f''



   a. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.
   b. La fonction f admet trois points d'inflexion.
   c. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.
   a. La suite (u_n) est minorée.
   b. La suite (u_n) est décroissante.
   c. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2 021.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,
   $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$.
   On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil  :
  u = 2
  n = 0
  while u < 45 :
    u = 0,75*u + 5
    n = n+1
  return n
```

   Cette fonction renvoie :
   a. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$;
   b. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;
   c. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$.
4. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

   On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
   Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

a. $(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$	**b.** $4(x-1)\mathrm{e}^{-2x}$	**c.** $4\mathrm{e}^{-2x}$	**d.** $(x+2)\mathrm{e}^{-2x}$