T^{ale} *22 novembre 2021*

Devoir n° 6 : TVI et continuité (2h)

(I) **(8 points)** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \mathrm{e}\sqrt{x}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Déterminer les variations de f.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^2.$$

3. En déduire la convergence de la suite (u_n).
4. Déterminer la limite de (u_n).
5. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.
   Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

   Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2\,021$, alors la suite (u_n) est croissante. »
   Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^2$. »
   Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

(II) **(12 points)**

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   b) On souhaite déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} par balayage à l'aide d'un programme pyhon. Compléter le programe suivant (ligne 1,4,5).

```
1   h= ...
2   a=0
3   while g(a)*g(a+h)>0:
4     ....
5   print( .... ,"< alpha <", ...)
```

   c) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   d) Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

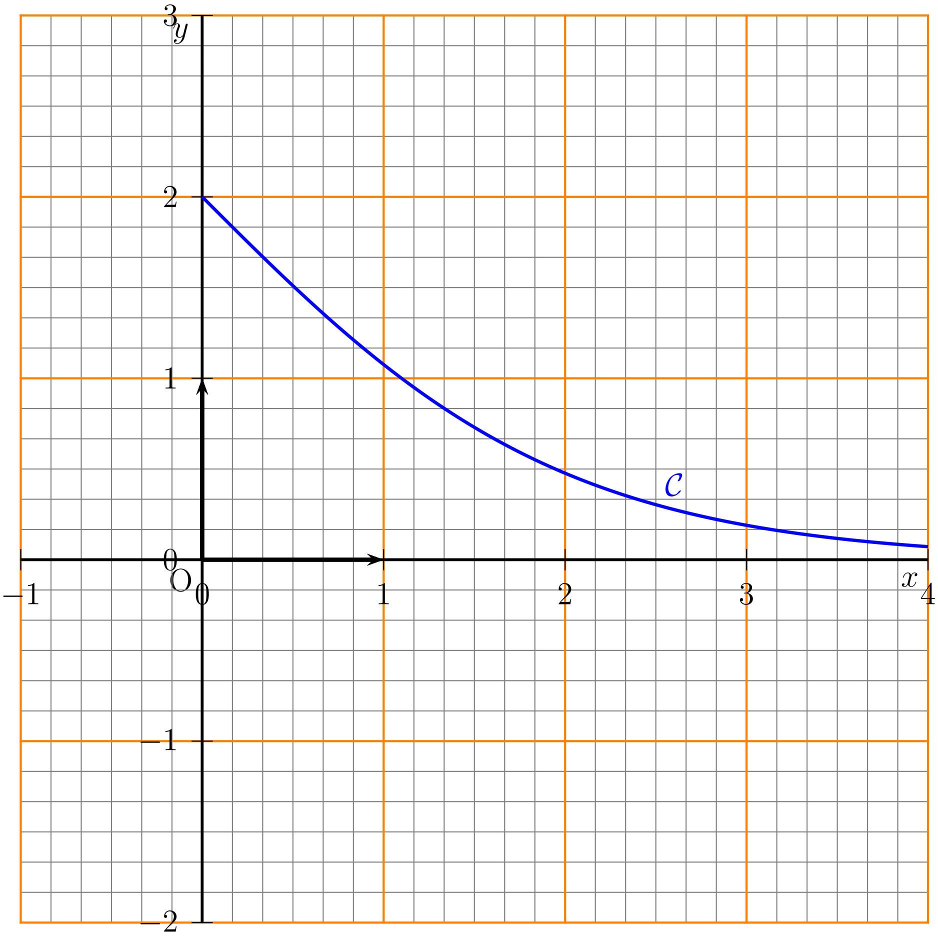
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
La figure est donnée ci-dessous.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,

Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $\mathrm{O}PMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?



III✳ On considère la suite (u_n) définie pour les entiers naturels non nuls par :

$$u_n = E\left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)$$

où E représente la fonction partie entière.
La suite (u_n) converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.