Devoir n° 4 : Suites (2h00)

I (10 points)
La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?
   b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
4. a) Ecrire l'inégalité de la question 3 au rang n ainsi qu'au rang $n+1$.
   En déduire, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).
   b) Démontrer à l'aide de la question 3 que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$
5. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.
   c) Retrouver alors la limite de la suite (u_n).

II (3 points) Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n, par
   $$p_n = n^2 - 42n + 4.$$
   Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.
2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
   - $U_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
   - $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

   Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.
3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n,
   $$n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n.$$
   Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

III **(10 points)** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   b) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; On admet que $\ell = \dfrac{2+3\ell}{4+\ell}$.
   Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

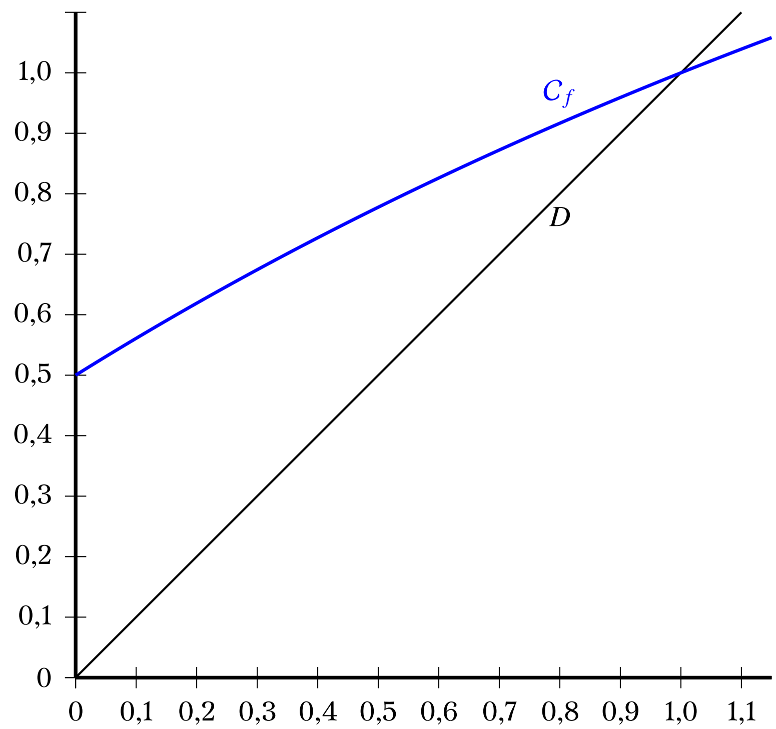
1. On donneci-dessous, la courbe représentative, C_f, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$. Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3. Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?
2. a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n).$$

   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.



IV✳ **Nombre de Chapernowne** On considère la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 0,1$, $u_2 = 0,12$, $u_3 = 0,123$, $u_4 = 0,1234$, etc ….
La suite (u_n) converge-t-elle ?

V✳ Soit (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n2^n$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$$

2. En déduire

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (k+2)2^k$$