Devoir n° 2 : Récurrence (20 min)

I On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.
2. a) Calculer u_1, u_2, u_3. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
   b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
   c) Établir que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - 1 = -\frac{u_n - 1}{2u_n + 1}$$

   d) En déduire à l'aide d'une démonstration par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

II✳ Montrer que la somme en degrés des angles d'un polygone convexe à n côté ($n \geq 3$) est égale à $180(n-2)$.
On dit qu'un ensemble est convexe dés lors que si deux points sont dans cet ensemble alors le segment délimité par ces 2 points est aussi dans cet ensemble. Le symbole pacman n'est pas convexe, un triangle ou un disque le sont.