DS N°2

$\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n+2}{2u_n+1}$; $u_0 = 2$

1 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 0$.

Initialisat° : pour $n=0$; $u_0 = 2 > 0$ donc la récurrence est initialisée

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$; supposons $u_k > 0$ et montrons $u_{k+1} > 0$.

$u_k > 0$ donc $u_k + 2 > 0$ et $2u_k + 1 > 0$

Alors par quotient $\dfrac{u_k+2}{2u_k+1} > 0$, c'est-à-dire $u_{k+1} > 0$

Donc l'hérédité est montrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

2a $u_1 = \dfrac{2+2}{4+1} = \dfrac{4}{5}$

$$u_2 = \frac{\frac{4}{5}+2}{\frac{8}{5}+1} = \frac{14}{13}$$

$$u_3 = \frac{\frac{14}{13}+2}{\frac{28}{13}+1} = \frac{40}{41}$$

2b On a alors : $u_1 - 1 = -\frac{1}{5} < 0$ du signe de $(-1)^1 = -1$.

$u_2 - 1 = \frac{1}{13} > 0$ du signe de $(-1)^2 = 1$

$u_3 - 1 = -\frac{1}{41} < 0$ du signe de $(-1)^3 = -1$

2c $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n+2}{2u_n+1} - 1$

$$= \frac{u_n + 2 - (2u_n+1)}{2u_n+1}$$

$$= \frac{-u_n+1}{2u_n+1}$$

$$= \frac{-(u_n-1)}{2u_n+1} = -\frac{u_n-1}{2u_n+1}$$

2d Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n - 1$ est du signe de $(-1)^n$.

Initialisation : Pour $n \in \{0;1;2;3\}$ la ppté est vérifiée (d'après 2b)
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, suppons $u_k - 1$ du signe de $(-1)^k$ et montrons que u_{k+1} est du signe de $(-1)^{k+1}$

On a d'après 2c : $u_{k+1} = -\dfrac{u_k - 1}{2u_k + 1}$
Or :

- $u_k - 1$ est du signe de $(-1)^k$
- $2u_k + 1 > 0$ (car $u_k > 0$ d'après 1)

Donc par produit : $\dfrac{u_k - 1}{2u_k + 1}$ est du signe de $(-1)^k$

et par produit par (-1) ; $-\dfrac{u_k - 1}{2u_k + 1}$ est du signe de $(-1)^{k+1}$

c'est-à-dire : u_{k+1} du signe de $(-1)^{k+1}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n - 1$ est du signe de $(-1)^n$.