Devoir n° 1 : Révisions et récurrence (1h30)

I **(2 points)**
Calculer et simplifier l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

$f_1(x) = (x + x^2)e^{3x}$; | $f_2(x) = \dfrac{e}{(4x^2+1)^2}$;

II **(4 points)** Résoudre les équations et inéquations suivantes

(E_1) : $(e^{3x} - e^2)(e^{2x} - \sqrt{e}) = 0$

(E_2) : $e^{\frac{1}{x}} > e^2$

(E_3) : $x - \sqrt{x} - 6 = 0$ *on pourra poser* $X = \sqrt{x}$

III **(4 points)** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2xe^{-x} - (1-x)^2$$

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$
$$f'(x) = 2(1-x)(1+e^{-x})$$
2. En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

IV **(2 points)** Les suites suivantes sont définies pour $n \in \mathbb{N}$. Dire lesquelles sont arithmétiques ou géométriques (en justifiant) et préciser le cas échéant la raison et le premier terme.

1. $u_n = 3n - 7$
2. $v_n = 4^{n-3}$
3. $w_{n+1} = \dfrac{w_n^2 - 1}{w_n + 1}$ avec $w_0 = -4$.
4. $x_n = n^2 - 3n$

V **(5 points)**

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 115$ et la relation de récurrence suivante pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 0,4u_n + 120$$

1. Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, un seul permet d'afficher la valeur finale u_N lorsque N est saisi. Lequel ?

algorithme 1	**algorithme 2**	**algorithme 3**

Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
 	
Début :
Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire
  Affecter $0,4 \times U + 120$ à U
  Afficher U
Fin Pour
Fin
	Variables :
	U est un nombre réel
	i et N sont des nombres entiers
	
	Début :
	Saisir une valeur pour N
	Pour i de 1 à N faire
	  Affecter 115 à U
	  $0,4 \times U + 120$ à U
	Fin Pour
	Afficher U
	Fin
		Variables :
		U est un nombre réel
		i et N sont des nombres entiers
		
		Début :
		Saisir une valeur pour N
		Affecter 115 à U
		Pour i de 1 à N faire
		Affecter $0,4 \times U + 120$ à U
		Fin Pour
		Afficher U
		Fin

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.

   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

4. En déduire pour tout entier naturel n, l'expression explicite de la suite (u_n).

5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

VI **(3 points)** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n - n + 1$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + n$.

VII✳ Résoudre

$$4^{x+1} - 33 \times 2^x + 8 = 0$$

VIII✳ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$