DS N°1

I $f_1(x) = (x+x^2)\,e^{3x}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = (1+2x)e^{3x} + (x+x^2)3e^{3x}$

$$= e^{3x}(3x^2+5x+1)$$

$f_2(x) = \dfrac{e}{(4x^2+1)^2}$

$= e(4x^2+1)^{-2}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2'(x) = e(-2).(4x^2+1)^{-3}.8x$

$$= \frac{-16ex}{(4x^2+1)^3}$$

II (E_1) : $(e^{3x} - e^2)(e^{2x} - \sqrt{e}) = 0$

$\iff e^{3x} = e^2$ ou $e^{2x} = e^{1/2}$

$\iff 3x = 2$ ou $2x = 1/2$ (la exp ↗ sur $\mathbb{R}$)

$\iff x = \frac{2}{3}$ ou $x = \frac{1}{4}$

$$\boxed{S = \left\{\frac{2}{3} ; \frac{1}{4}\right\}}$$

(E_2) : $e^{1/x} > e^2$. Le domaine de résolut° est $\mathbb{R}^*$

$\iff \frac{1}{x} > 2$ (la exp ↗ sur $\mathbb{R}$)

$\iff \dfrac{1-2x}{x} > 0$

On a le tableau de signe suivant :

x		0		$1/2$	
$1-2x$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{1-2x}{x}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

On a donc $\boxed{S =]0 ; \frac{1}{2}]}$

(E_3) : $x - \sqrt{x} - 6 = 0$

On pose $X = \sqrt{x}$; alors $(E_3) \Leftrightarrow X^2 - X - 6 = 0$

$\Delta = 25$ et donc $X = \frac{1+5}{2} = 3$ ou $X = -2$

Donc $(E_3) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3$ ou $\sqrt{x} = -2$ (impossible)

$\Leftrightarrow x = 9$

Ainsi : $\boxed{S = \{9\}}$

III $f(x) = 2xe^{-x} - (1-x)^2$

1 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2.(1-x).(-1)$

$= e^{-x}(2-2x) + 2(1-x)$

$= 2(1-x)(e^{-x}+1)$

2 $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + e^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

On déduit alors le tableau de variations de f.

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

Avec $f(1) = \frac{2}{e}$

3 L'équation de la tangente en 0 est

$T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ici $f'(0) = 4$ et $f(0) = 1$

Alors $\boxed{T : y = 4x + 1}$

IV 1) $u_n = 3n - 7$ est la forme explicite d'une suite arithmétique de raison 3 avec $u_0 = -7$

2) $v_n = 4^{n-3}$ pour $n \in \mathbb{N}$

$= 4^{-3} \cdot 4^n$

$= \frac{1}{256} \cdot 4^n$ c'est la forme explicite d'une suite géométrique de raison $q = 4$ avec $u_0 = \frac{1}{256}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{w_n^2 - 1}{w_n + 1}$ (en supposant $w_n + 1 \neq 0$, sinon c'est absurde)

$= \frac{(w_n - 1)(w_n + 1)}{w_n + 1}$

$= w_n - 1$ Ainsi (w_n) est une suite arithmétique de raison -1 avec $w_0 = -4$.

4) $x_n = n^2 - 3n$

On a $x_0 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 4 - 6 = -2$

Ainsi (x_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique

V 1)
- Le 1^{er} algo affiche N valeurs et on en veut qu'une. Ce n'est pas lui
- Le $2^{ème}$ algo affecte $U = 115$ dans la boucle. Il fait donc toujours le même calcul. Ce n'est pas lui.
- Le $3^{ème}$ marche très bien !

2) $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = u_{n+1} - 200$

$= 0{,}4 u_n + 120 - 200$

$= 0{,}4 u_n - 80$

$= 0{,}4 (u_n - 200)$

$= 0{,}4 v_n$

Ainsi (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 200 = -85$ et de raison $q = 0{,}4$

3 Par théorème, $v_n = v_0 . q^n$

$v_n = -85\ 0,4^n$

4 On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = v_n + 200$ donc $u_n = 200 - 85 . 0,4^n$

5 $|0,4| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,4^n = 0$ et donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 200$

VI

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = 2^n + n$.

Initialisat°: Pour $n = 0$; $u_0 = 1$ et $2^n + n = 2^0 + 0 = 1$ donc initialisat° faite

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$;

On suppose $u_k = 2^k + k$ et on montre $u_{k+1} = 2^{k+1} + k + 1$

On a par déf $u_{k+1} = 2u_k - k + 1$

$= 2(2^k + k) - k + 1$ (par utilisat° de l'hypothèse de récurrence)

$= 2.2^k + 2k - k + 1$

$= 2^{k+1} + k + 1$

qui est ce qu'il fallait démontrer

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n$.