DS N° 14

I **1** $I_1 = \int_0^e \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^e \underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{u'/u}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^e .$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{2}\ln(e^2+1)}$$

2 $I_2 = \int_0^3 xe^{-x^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^3 \underbrace{(-2x)e^{-x^2}}_{u'e^u}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-9}-1\right)$$

$$\boxed{I_2 = \frac{1-e^{-9}}{2}}$$

3 $I_3 = \int_0^1 xe^{2x}\,dx$

On intègre par parties en posant :

$u = x \quad v' = e^{2x}$

$u' = 1 \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

Alors $I_3 = \left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\int_0^1 \underbrace{2e^{2x}}_{u'e^u}\,dx$$

Donc $I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1)$

$$\boxed{I_3 = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}}$$

II **1** Pour $x \geqslant 1$; $\ln x \geqslant 0$

donc $(\ln x)^n \geqslant 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

et donc $x^2(\ln x)^n \geqslant 0$ $(\times x^2$ avec $x^2 > 0)$

On a donc par théorème de positivité (bornes dans l'ordre $1 \leq e$)

$\int_1^e x^2(\ln x)^n dx \geqslant 0$ et donc $\boxed{I_n \geqslant 0}$

2a $\forall x \in [1;e]$ on a

$x \leqslant e$

donc $\ln x \leqslant 1$ (car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

donc $(\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$ $(\times (\ln x)^n$ avec $(\ln x)^n \geqslant 0$ car $x \geqslant 1)$

donc $\underline{x^2(\ln x)^{n+1} \leqslant x^2(\ln x)^n}$ $(\times x^2$ avec $x^2 > 0)$

2b Par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre, $(1 \leq e)$

on a

$$\int_1^e x^2(\ln x)^{n+1} dx \leq \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$$

et donc $I_{n+1} \leq I_n$.

Ainsi, **(I_n) est une suite décroissante.**

3 (I_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

4 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad I_{n+1} = \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx$

par intégration par parties :

$u' = x^2 \qquad v = (\ln x)^{n+1}$

$u = \frac{x^3}{3} \qquad v' = (n+1)(\ln x)^n \cdot \frac{1}{x}$

Alors on a $\quad I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3} \cdot (\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot (n+1)(\ln x)^n \cdot \frac{1}{x} dx$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$$

Donc on a $\quad I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$

Et donc on a $\quad \boxed{3 I_{n+1} + (n+1) I_n = e^3}$

5 D'après la relation précédente, en isolant I_n, on a

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\quad I_n = \frac{e^3}{n+1} - \frac{3 I_{n+1}}{n+1}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^3}{n+1} = 0$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_{n+1} = \ell$ donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{n+1} = 0$

Donc finalement par somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0.}$