Devoir n° 8 : Equations différentielles et espace (1h)

I **(4 points)** La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100 °C. Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20 °C.
Théo lui rétorque que quand il sera à 37 °C il pourra le toucher sans risque ; et sa grand-mère qui fait de la recherche dans la température de cuisson des céramiques lui répond :
« La température du plat est donnée par une fonction g du temps t, exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle suivante : »

$$(E) \quad y' + 0,04y = 0,8.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) et donner sa solution particulière g définie par la condition initiale $g(0) = 100$.

   Montrer que cette solution est :
   $$g(t) = 80\mathrm{e}^{-0.04t} + 20$$

2. En utilisant l'expression de $g(t)$ trouvée, déterminer à partir de combien de temps le plat fera moins de 37 °C. En donner une valeur arrondie à la seconde près.

II **(6 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$.
Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation : $3x+y-z-1 = 0$ et $(\mathcal{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t+1 \\ y & = & 2t \\ z & = & t+2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

1. a) Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan $(\mathcal{P})$? Justifier.
   b) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ est incluse dans le plan $(\mathcal{P})$.
2. Soit $(\mathcal{Q})$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$.
   a) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$.
   b) Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(\mathcal{Q})$ et de la droite $(\mathcal{D})$.
   c) Montrer que CI = $\sqrt{3}$.
3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathcal{D})$ de coordonnées $(-t+1\ ;\ 2t\ ;\ -t+2)$.
   a) Vérifier que pour tout nombre réel t, $\mathrm{C}M_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.
   b) Montrer que CI est la valeur minimale de $\mathrm{C}M_t$ lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.