DS N°8

I **1** On a (E) : $y' + 0{,}04y = 0{,}8 \Leftrightarrow y' = -0{,}04y + 0{,}8$

On a une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$

Les solutions sont donc de la forme $y(t) = Ke^{-0{,}04t} - \frac{0{,}8}{-0{,}04}$

Donc $y(t) = Ke^{-0{,}04t} + 20$.

De plus $y(0) = 100$ donc $K + 20 = 100$ donc $K = 80$

Finalement $g(t) = 80e^{-0{,}04t} + 20$

2 On cherche à résoudre $g(t) \leqslant 37$

$$\Leftrightarrow 80e^{-0{,}04t} + 20 \leqslant 37$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}04t} \leqslant \frac{17}{80}$$

$$\Leftrightarrow -0{,}04t \leqslant \ln\left(\frac{17}{80}\right) \quad (\text{Car } \ln \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

$$\Leftrightarrow t \geqslant \frac{\ln\left(\frac{17}{80}\right)}{-0{,}04} \quad (\div -0{,}04 \text{ avec } -0{,}04 < 0)$$

On note $t_0 = -\frac{\ln\left(\frac{17}{80}\right)}{0{,}04} \approx 38{,}72$ min ≈ 38 min et 43 secondes

Au bout de 38min et 43s le plat fait moins de 37°

II 1a On a $\mathcal{P}: 3x+y-z-1=0$ et $C(1,3,2)$

$3x_C+y_C-z_C-1=3+3-2-1=3\neq 0$ donc $C\notin\mathcal{P}$

1b On a $\mathcal{D}: \begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t \\ z=-t+2 \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

Soit $M(-t+1;2t;-t+2)\in\mathcal{D}$ alors $3x_M-y_M-z_M-1=3(-t+1)+2t-(-t+2)-1$
$=1-2-1$
$=0$

Donc $M\in\mathcal{P}$ donc $\mathcal{D}\subset\mathcal{P}$

2a le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et donc vecteur normal à Q.

On déduit $Q: -x+2y-z+d=0$ et $(1,3,2)\in Q$ donc
$-1+6-2+d=0$ donc $d=-3$

Ainsi $Q: -x+2y-z-3=0$

2b $I(x;y;z)\in Q\cap\mathcal{D}$ ssi $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t \\ z=-t+2 \\ x+2y-z-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -(-t+1)+4t+t-2-3=0$
$\Leftrightarrow 6t=6$
$\Leftrightarrow t=1$ Donc $I(0;2;1)$

2c

On a $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $CI^2=3$ et $CI=\sqrt{3}$

3a $M_t(1-t;2t;2-t)\in\mathcal{D}$; $\overrightarrow{CM_t}\begin{pmatrix}-t\\2t-3\\-t\end{pmatrix}$ donc $CM_t^2=t^2+(2t-3)^2+t^2$
$=6t^2-12t+9$

3b On note $f(t)=6t^2-12t+9$.
Alors $f'(t)=12t-12$

On déduit le tableau de variation de f :

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Alors f admet un minimum en $t = 1$ qui vaut 3

c'est donc que le minimum de CH_t^2 est 3

et donc CH_t admet pour minimum $\sqrt{3} = CI$