Devoir n° 7 : Exponentielle et Ln (2h)

I **(2 points)**

1. Déterminez la solution f de l'équation différentielle suivante qui satisfait $f(1) = 0$.

$$y' - 3y = 2$$

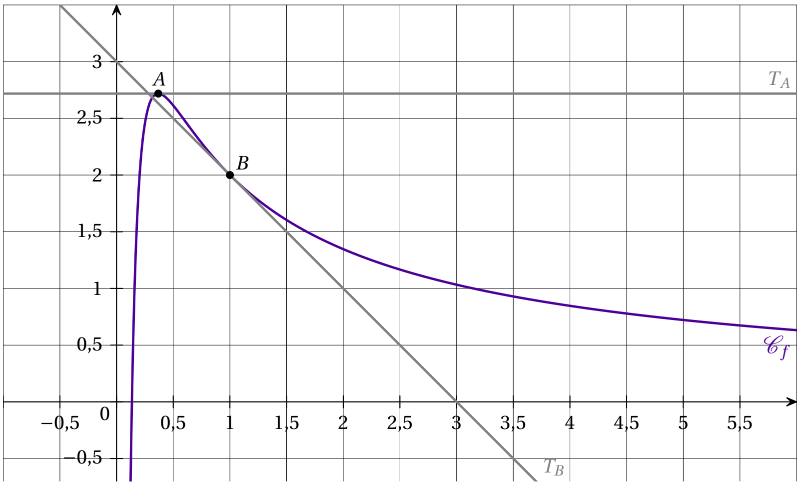
2. On donne l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$$

Montrer que la fonction $g(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ est solution de de (E).

II **(8 points)** Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :
- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty]$;
- la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e}\right)$;
- la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie B

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;+\infty]$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty]$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}$$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty]$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f.
   On admet que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty]$,

$$f''(x) = \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3}$$

   Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

III (7 points)

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe C représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
3. En déduire que si $x \geqslant \mathrm{e}$ alors $f(x) \geqslant \mathrm{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

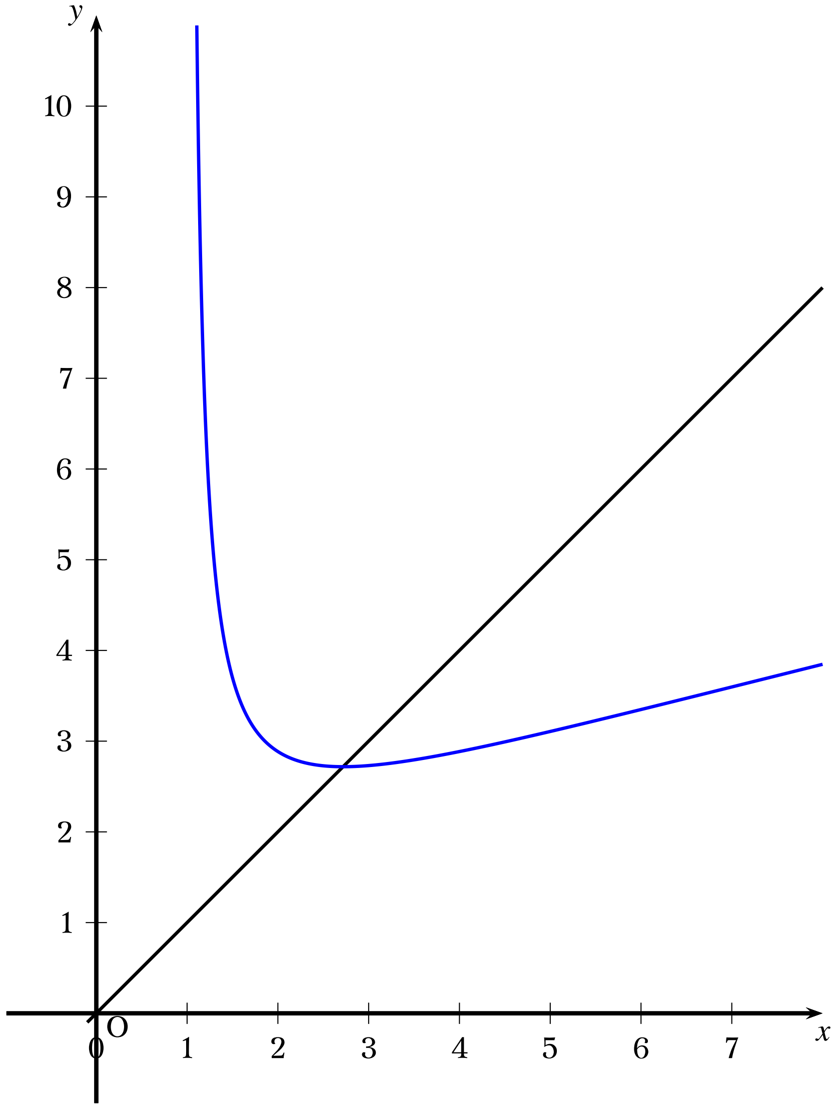
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe C et la droite $\mathcal{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.
   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant \mathrm{e}$.
   b) Déterminer les variations de la suite (u_n).
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   d) Soit ℓ la limite de (u_n). Montrer que $f(\ell) = \ell$, déterminer ℓ.

Exercice iii

À rendre avec la copie



IV (7 points) Commun à tous les candidats

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note C_k sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

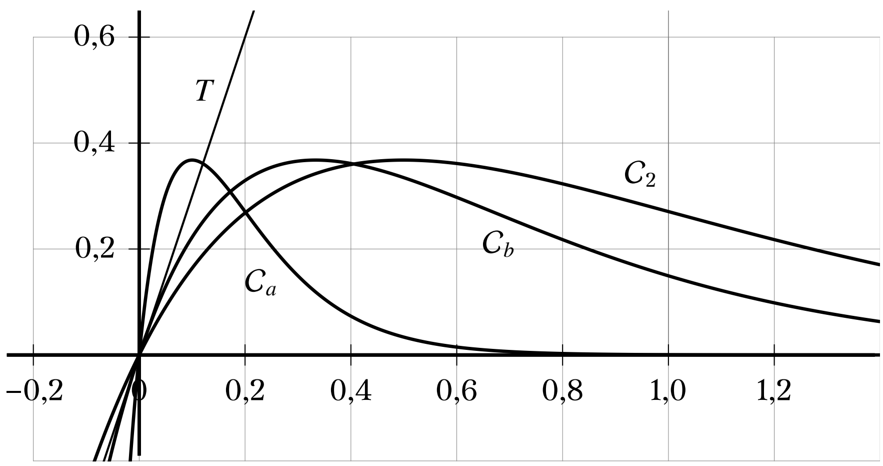
On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe C_1 admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes C_2, C_a et C_b où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à C_b au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes C_k passent par un même point.
2. a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1 - kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$

   b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

   c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

   d) Écrire une équation de la tangente à C_k au point O origine du repère.

   e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.