

## Devoir n° 5 : Continuité (2h)

---

### I (2 points)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{7}{(x^2 + 3)^4}; \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}. \quad \left| \quad f_2(x) = (4x + 1)\sqrt{3x^2 + 1}; \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

### II (3 points)

Déterminer dans chaque cas la limite de  $f$  à l'endroit indiqué.

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{6x^2 - 1}{2x^2 - 27x}}; \quad \text{en } +\infty \quad \left| \quad f_2(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x}; \quad \text{en } -2+$$

### III (2 points) Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x > -2 \\ -x^3 - 4 & \text{pour } x \leq -2 \end{cases}$$

Étudiez la continuité de  $f$  en  $-2$ .

### IV (5 points) Soit $(u_n)$ une définie par récurrence par $u_0 = 0,1$ et

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$$

1. Étudier les variations de la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x + 3}{x + 4}$  sur  $I = ] - 4; +\infty[$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

3. En déduire que  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$  que vous déterminerez.

Ⓟ (8 points) Soit  $f$  définie sur  $D = ]-1; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

### 1. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  définie sur  $D$  par  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ .

- Etudier  $g$  et dresser son tableau de variation.
- Montrer que  $g$  admet une unique racine  $\alpha$  dont vous donnerez une valeur approchée à  $10^{-3}$ .
- Donnez le signe de  $g$

### 2. Etude de $f$

- Calculer  $f'(x)$  et montrer que

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3 + 1)^2}$$

- Etudiez les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.
- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

### 3. Algorithmes

- Complétez le programme suivant (lignes 8,9,11) afin qu'il donne un encadrement à  $10^{-4}$  de  $\alpha$ . Quel est le nom de ce type d'algorithme ?

```
1 def g(x):
2     return 2*x**3-3*x**2-1
3 e=0.0001
4 a=1
5 b=2
6 while (b-a)>e :
7     m=(a+b)/2
8     if ..... :
9         b=.....
10    else :
11        a=.....
12
13 print(a, "< alpha <", b)
```

- Un élève dit qu'il a inventé un autre programme astucieux. Pouvez-vous préciser ce qu'il fait et en combien de boucles au maximum ?

```
1 def g(x):
2     return 2*x**3-3*x**2-1
3 h=0.1
4 a=1
5 while h>0.0001 :
6     while g(a)g(a+h)>0 :
7         a=a+h
8     h=h/10
9 print(a, "< alpha <", a+h)
```

### c) Seulement en bonus

Combien de boucles fait le premier algorithme ? Lequel est le meilleur ?