DS 5

I

$$f_1(x) = \frac{7}{(x^2+3)^4} = 7(x^2+3)^{-4}$$

Donc $f_1'(x) = 7(-4)(x^2+3)^{-5} \cdot 2x$

$$= -\frac{56x}{(x^2+3)^5}$$

$$f_2(x) = (4x+1)\sqrt{3x^2+1}$$

$$f_2'(x) = 4\sqrt{3x^2+1} + (4x+1)\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$$

$$= \frac{4(3x^2+1)+3x(4x+1)}{\sqrt{3x^2+1}} = \frac{24x^2+3x+4}{\sqrt{3x^2+1}}$$

II

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{6x^2-1}{2x^2-27x}}$$

$$X = \frac{6x^2-1}{2x^2-27x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} X = \frac{6}{2} = 3$ par th du plus haut degré

$\lim\limits_{X\to 3} \sqrt{X} = \sqrt{3}$ ($\sqrt{\cdot}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$)

Donc par composée $\lim\limits_{+\infty} f_1 = \sqrt{3}$

$$f_2(x) = \frac{-4}{x^2+2x}$$

$x^2+2x = x(x+2)$ alors

x		-2		0	
x^2+2x	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $\lim\limits_{x\to-2^+}(x^2+2x) = 0^-$ et donc par quotient $\lim\limits_{-2^+} f_2 = +\infty$

III $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > -2 \\ -x^3 - 4 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$

On a $f(-2) = -(-2)^3 - 4 = 8 - 4 = 4$

$\lim_{-2^-} f = \lim_{x \to -2} (-x^3 - 4) = 4$

$\lim_{-2^+} f = \lim_{x \to -2} x^2 = 4$

Ainsi $\lim_{-2} f = f(-2)$ donc f est continue en -2.

IV $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$ sur $I =]-4; +\infty[$

1) f dérivable sur I et $f'(x) = \frac{(x+4)2 - (2x+3)}{(x+4)^2}$

$= \frac{5}{(x+4)^2}$

Donc $f'(x) > 0$ sur I et donc f croissante sur I.

2) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

Initialisat°: $u_0 = 0,1$; $u_1 = f(u_0) = \frac{3,2}{4,1} \approx 0,8$

On a donc bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$

donc $f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1)$ car $f \nearrow$ sur I

donc $\frac{3}{4} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$

Ainsi $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$ et l'hérédité est démontrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

3) D'après 2), $(u_n) \nearrow$ et majorée par 1. Donc par th (u_n) converge vers $l \in [0;1]$

On a
- $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$
- f continue en l
- $u_{n+1} = f(u_n)$

donc par th du pt fixe $f(l) = l$

$f(\ell) = \ell$ si $\dfrac{2\ell+3}{\ell+4} = \ell$

$\Leftrightarrow 2\ell+3 = \ell^2+4\ell \Leftrightarrow \ell^2+2\ell-3=0$

$\Delta = 16$

Donc $\ell = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ ou $\ell = -3$

Comme $\ell \in [0;1]$, on déduit $\ell = 1$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

V $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$ sur $D =]-1;+\infty[$

1) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

a) g dérivable sur D et $g'(x) = 6x^2 - 6x$
$= 6x(x-1)$

On en déduit le tableau de variat° de g.

x	-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ par la règle du plus haut degré

b) Sur $]-1;1]$, g a pour maximum -1 donc $g(x)=0$ n'a pas de racine

Sur $[1;+\infty[$;
- g est strictement $\uparrow$
- g est continue
- $g(1) = -2$; $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$; $0 \in [-2;+\infty[$

Donc par CTVI g admet une unique racine α sur $[1;+\infty[$
Ainsi sur D, g admet une unique racine

Par balayage à la calculatrice on a $\alpha \simeq 1{,}678$ (à 10^{-3})

c) A l'aide du tableau de variat° de g :

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2 a $f'(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x^3}\right)'$

$$= \frac{(1+x^3)(-1) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$$

b Par th du plus haut degré $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$

En -1^+ : $x \longmapsto x^3$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-1^+} x^3 = -1^+$

Ainsi $\lim\limits_{x\to -1^+} 1+x^3 = 0^+$ et $\lim\limits_{-1^+} f = +\infty$

c On a alors le TV suivant :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3 a Il s'agit d'un algorithme de dichotomie

L7 : Si $g(a)g(m) < 0$:

L8 : $b = m$

L9 : else

L10 $a = m$

b Il s'agit d'un algorithme par balayage.

Il commence avec une précision de 10^{-1} et à chaque tour il divise la précision par 10 donc 10^{-2} puis 10^{-3} et 10^{-4}

En fait il trouve une fourchette d'amplitude 10^{-1} en 10 fois max puis il redivise en 10 cette fourchette et trouve un nouvel encadrement d'amplitude 10^{-2} en 10 fois max etc...

Le nombre max de boucles est donc $10+10+10+10 = 40$ tours.

C'est beaucoup mieux qu'un balayage simple qui ferait 10^4 tours de boucle max !

c) L'intervalle de départ a pour longueur 1 et à chaque tour de boucle on divise la longueur par 2

Ainsi au bout de n boucles, la longueur de l'intervalle est $\frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2^n} < 10^{-4}$ ssi $2^n > 10^4$ et on termine à la calculatrice ...

Ou bien on utilise ln.

$2^n > 10^4$ ssi $\ln(2^n) > \ln 10^4$ (car ln ↑)

ssi $n \ln 2 > \ln 10^4$

ssi $n > \frac{4 \ln 10}{\ln 2}$

Ainsi $n > 13,2$ donc $n = 14$

L'algorithme fait 14 tours de boucle.