Devoir n° 1 : Suites (1h15)

I **(4 points)** Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 1$ et $u_0 = \dfrac{3}{2}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq u_n \leq 2$.

II **(5 points)** Déterminer les limites des suites suivantes :

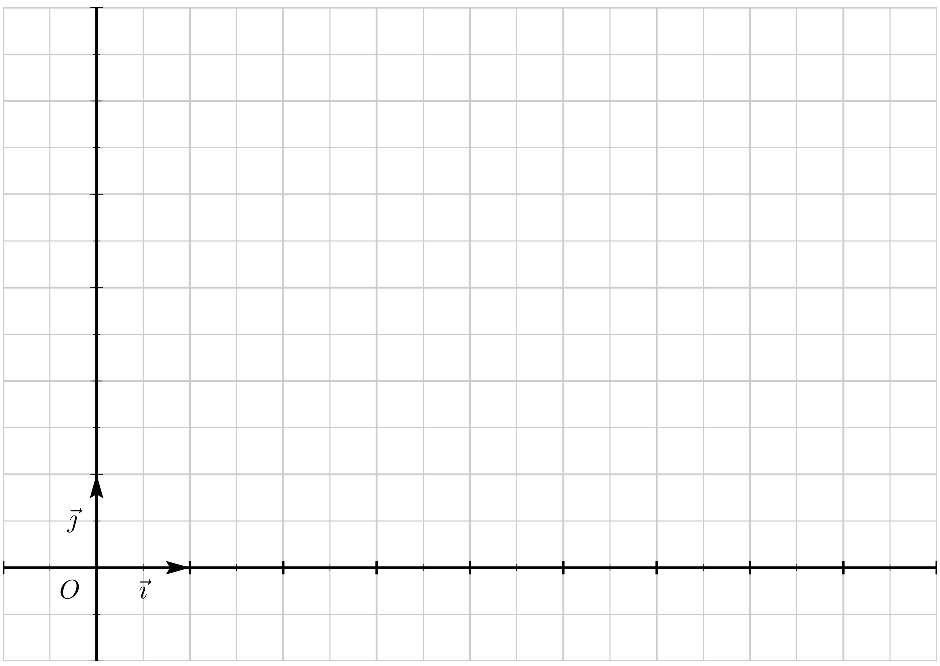
1. $u_n = n^3 - \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = 2n^3 - 5n^4$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_n = n^2 - n(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.
4. $z_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

III **(3 points)** Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_{n+1} = u_n - n^3 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = 3$.
2. $v_{n+1} = (v_n)^2 + 3v_n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $v_0 = 3$.

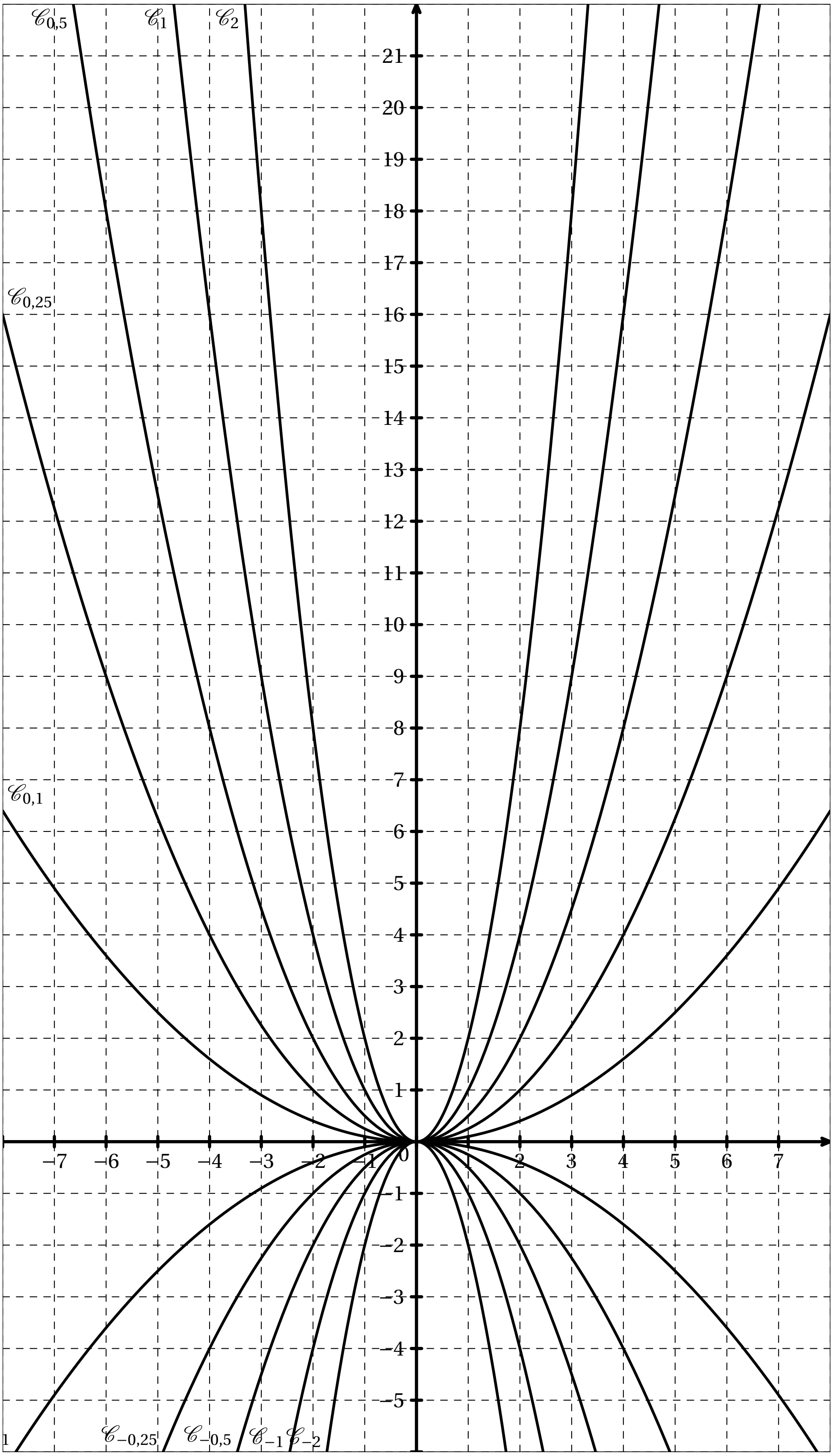
IV **(5 points)** Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 5$.

1. a) Sur le graphique ci-joint, représenter la fonction affine $x \mapsto -\frac{2}{3}x + 5$ puis les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
   b) Quelle conjecture peut-on faire sur $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?
2. On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la suite (v_n) par $v_n = u_n - 3$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b) Exprimer (v_n) en fonction de n.
   c) Exprimer (u_n) en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.



V **(3 points)** Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. On considère les fonctions f_m définies sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = mx^2$. Vous trouverez le sur le graphe ci-dessous le graphe $\mathscr{C}_m$ de certaines fonctions f_m.
On considère $\mathscr{D}$ la droite d¡équation $y = -x - 2$.

1. Conjecturer selon les valeurs de m le nombres de points d'intersection de $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$.
2. Démontrer votre conjecture par le calcul.



VI✳ **(bonus)** Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$ on a :

$$2^n \geq n^2$$