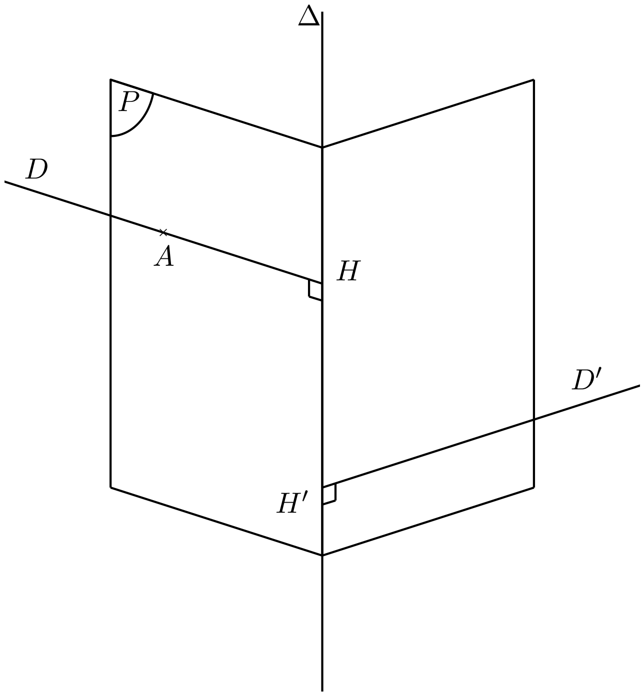
Devoir de Mathématiques N^o 11 (1h30) - Espace

I L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3\ ;\ -4\ ;\ 1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$.
On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1-t \\ y & = & 2+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D'. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D', distance qui sera définie à la question **5.**
On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H' le point d'intersection des droites D' et Δ. On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D' sont sécants en H'. Une figure est donnée en annexe.

1. On considère le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$. Démontrer que $\vec{w}$ est une vecteur directeur de la droite Δ.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 2\ ;\ 3)$.
   a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P.
   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $3x+2y+3z-4=0$.
3. a) Démontrer que le point H' a pour coordonnées $(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.
   b) En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.
4. a) Déterminer les coordonnées du point H.
   b) Calculer la longueur HH'.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M' appartenant à D', $MM'\geqslant HH'$.
   a) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$.
   b) En déduire que $\left|\left|\overrightarrow{MM'}\right|\right|^2\geqslant\left|\left|\overrightarrow{HH'}\right|\right|^2$ et conclure.
   La longueur HH' réalise donc le minimum des distances entre une point de D et une point de D'. On l'appelle distance entre les droites D et D'.



II L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées
respectives $(1\,;\,0\,;\,2)$, $(1\,;\,1\,;\,4)$ et $(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 4\ ;\ -2)$.
   Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.
   a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
   b) La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?