DS 8

1 $f(x) = x e^{1-x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

$= x \cdot e \cdot e^{-x^2}$

$= \frac{1}{x} \cdot e \cdot \frac{x^2}{e^{x^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} X = x^2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \text{ par CC} \end{array}\right\} \text{ donc par composée } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$$

alors par inverse $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0}$ par produit

$\forall x \in \mathbb{R}$

2 $f'(x) = 1 \cdot e^{1-x^2} + x(1-x^2)' e^{1-x^2}$

$= e^{1-x^2} + x(-2x) e^{1-x^2}$

$= e^{1-x^2}(1-2x^2)$

Donc $f'(x)$ est du signe de $1-2x^2$ car $e^{1-x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

et $1-2x^2$ admet deux racines : $x_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Finalement on obtient le tableau de variations.

x		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\searrow 0$

et $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-\frac{1}{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1/2} = \frac{\sqrt{2e}}{2} = \sqrt{\frac{e}{2}}$

donc $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{e}{2}}$

Partie B

① On conjecture que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$

② sur $\mathbb{R}_-$: $f(x) = x\,e^{1-x^2}$

et $x \leq 0$; $e^{1-x^2} > 0$ donc $f(x) \leq 0$.

sur $\mathbb{R}_-$, $g(x) = e^{1-x}$ donc $g(x) > 0$.

On a donc $f(x) \leq 0 < g(x)$ donc sur $\mathbb{R}_-$ $f(x) < g(x)$

③ a) pour $x > 0$:

$$f(x) \leq g(x)$$

$\iff \ln f(x) \leq \ln g(x)$ car ln s.↑ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff \ln(x e^{1-x^2}) \leq \ln e^{1-x}$

$\iff \ln x + \ln e^{1-x^2} \leq 1-x$

$\iff \ln x + 1 - x^2 \leq 1 - x \iff \ln x - x^2 + x \leq 0$

$\iff \phi(x) \leq 0.$

b) $\forall x > 0$, ϕ dérivable et

$$\phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1$$

$$= \frac{1 - 2x^2 + x}{x}$$

et sur $\mathbb{R}_+^*$ $x > 0$ donc $\phi'(x)$ est du signe de $-2x^2 + x + 1$

$\Delta = 9$ donc on a deux racines : $\frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{-1-3}{-4} = 1$

Alors on déduit le signe de $\phi'(x)$ puis le tableau de variations de ϕ

x	0		1	
$\phi'(x)$	‖	$+$	0	$-$
$\phi(x)$	‖	↗	0	↘

c) 0 étant le maximum de ϕ sur $\mathbb{R}_+^*$ on déduit que $\phi(x) \leq 0$ $\forall x > 0$.

(4a) On déduit donc d'après (3a) que $f(x) \leq g(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

et donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

(4b) M d'abscisse x est un point de $\mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g$

ssi

$f(x) = g(x) \iff \phi(x) = 0$ (d'après 3a)

$\iff x = 1$ d'après le tableau de variations de ϕ

donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun noté A d'abscisse 1.

(4c) Pour montrer que la tangente est la même en ce point, il suffit de montrer que $f'(1) = g'(1)$.

On a $f'(1) = e^0(1-2) = -1$

et $g'(x) = -e^{1-x}$ donc $g'(1) = -1$.

donc $f'(1) = g'(1) = -1$ donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune de coefficient directeur -1 en A.