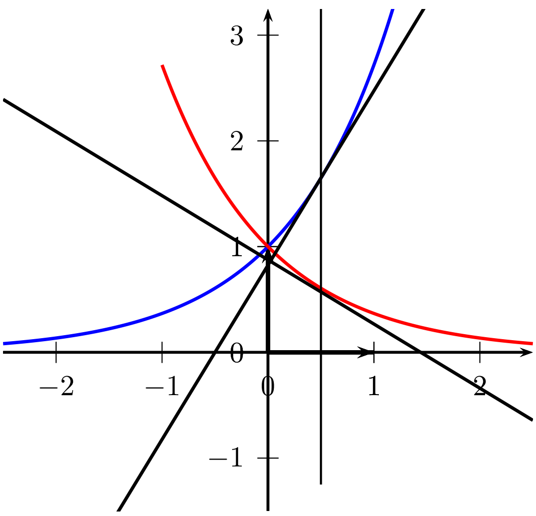
Devoir n° 7 : Fonction exponentielle et nombres complexes

I **(2 points)**
Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_g$ celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.
Pour tout réel a, on note M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse a.
La tangente en M à $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q.
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	$-2{,}5$	2
4	-2	2
5	$-1{,}5$	2
6	-1	2
7	$-0{,}5$	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à $\mathcal{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathcal{C}_g$.
2. a) Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?
   b) Démontrer cette conjecture.

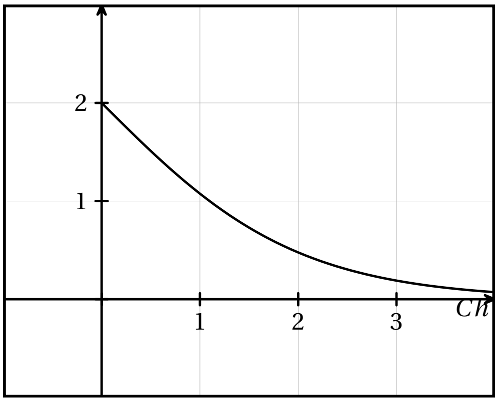
II **(2 points)** **Partie A :** Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; ,+\infty[$ que l'on note α ; déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Montrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ pour $x \geq 0$.
3. Dresser le tableau de variations de f ; montrer que $f(\alpha) = 4(\alpha - 1)$.

Partie C : On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{4}{e^x+1}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormal.



Pour tout réel $x \geq 0$, on note :
M le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(x; h(x))$,
P le point de coordonnées $(x; 0)$,
et Q le point de coordonnées $(0; h(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α et donner un encadrement de cette aire (en unités d'aire).
2. *Dans cette question, toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Si le point M a pour abscisse α, la tangente (T) en M à la courbe est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

III Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point O et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -1+\text{i}$ et $z_{\text{B}} = \frac{1}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A$'$ image du point A par la fonction f.
   b) Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B$'$ image du point B par la fonction f.
   c) Sur la copie, placer les points A, B, A$'$ et B$'$ dans le repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Pour les points B et B$'$, on laissera les traits de construction apparents.
2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = r\text{e}^{\text{i}\theta}$.
   a) Montrer que $z' = \frac{1}{r}\text{e}^{\text{i}(\pi-\theta)}$.
   b) Est-il vrai que si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.
3. Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_{\text{K}} = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
   a) Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2+x+y^2=0$.
   b) Soit $z = x+\text{i}y$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.
   c) Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x=1$.