Devoir n° 6 : Dérivabilité et continuité (1h30)

I (2 points)
Calculer les dérivées des fonctions suivantes et les écrire sous forme simplifiée :

$f_1(x) = \dfrac{1}{(3\sin x + 5)^3}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$f_2(x) = \sqrt{\cos x + 2}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

II (1 point)
Déterminer la limite de chacune des fonctions dans l'endroit indiqué.

$f_1(x) = \dfrac{\sin 4x}{5x}$ en 0.

III (8 points) Partie A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4x^3 - 3x - 8$$

1. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note α.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de f en $\dfrac{1}{2}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
2. a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(4x^2 - 1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
3. En utilisant la définition de α, montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3}{8}\alpha$; en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2}.

Partie C : On souhaite déterminer un encadrement de α par balayage. Nous disposons des algorithmes suivants et un seul fonctionne.

1. Préciser lequel et pourquoi.
2. Combien de tours de boucles fait-il environ ?

Programme 1

```python
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)>0:
    a=a+h

print(a,"< alpha <",a+h)
```

Programme 2

```python
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)<0:
    a=a+h

print(a,"< alpha < ",a+h)
```

Programme 3

```python
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)>0:
    a=a+h
    print(a,"< alpha <",a+h)
```

Partie D : Seulement en bonus (1 point)
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x$. (on pourra s'aider de la calculatrice)

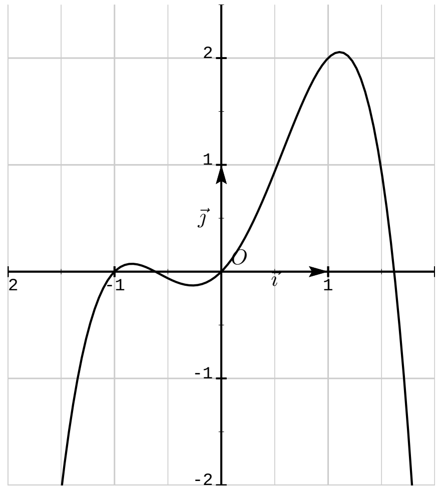
1. Conjecturer les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.

2. Pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, on considère les points M et N d'abscisses x respectivement sur $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.
   Que peut-on conjecturer sur la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$?
3. Démontrer les conjectures précédentes.

IV (4 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$. On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et A le point de coordonnées $(0; 1)$.

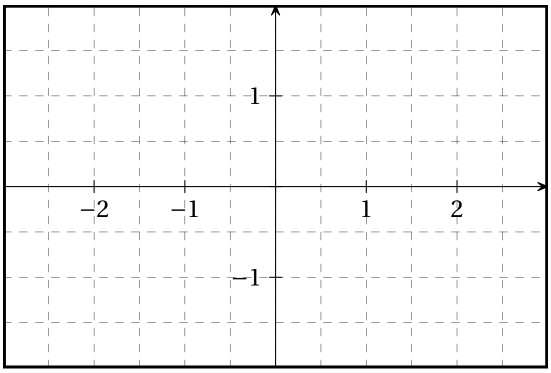
1. On cherche à déterminer la tangente (ou les tangentes) à $\mathscr{C}_f$ passant par le point A.
   Soit Δ_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
   a) Montrer que $A \in \Delta_a$ équivaut à $3a^4 - 2a^2 - 1 = 0$.
   b) Résoudre cette dernière équation.
   c) En déduire les équations des tangentes passant par A ainsi que les points de contact avec la courbe.
   d) Quelle observation particulière peut-on faire ?
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$. Quelles sont les droites tangentes à $\mathscr{C}_f$ et parallèles à la droite $\mathscr{D}$?



V (5 points)

Dans ce problème,le but est de représenté dans un repère orthonormé l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x; y)$ du plan tels que :

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$



1. Expliquer brièvement pourquoi $\mathscr{E}$ n'est pas un cercle.
2. Montrer que $M(x; y) \in \mathscr{E} \iff x \in [-2; 2]$ et $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ ou $y = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.
   On pose $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ sur $[-2; 2]$.
3. Montrer que f est paire.
4. On souhaite étudier la dérivabilité de f en 2.
   a) Montrer que le taux d'accroissement de f en 2 vaut pour tout $x \in]-2; 2[$
   $$t(x) = \frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{2(x-2)}$$
   b) Conclure sur la dérivabilité de f en 2 et en donner une interprétation géométrique.
5. Pour $x \in]-2; 2[$ déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $[-2; 2]$
6. Sur le repère ci contre tracer sommairement la fonction f puis la courbe $\mathscr{E}$.