Devoir n° 5 : Autour de la forme algébrique (1h)

I **(6 points)** Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

(E_1) : $(2-\mathrm{i})z+1=0$

(E_2) : $(3+2\mathrm{i})(z-1)=\mathrm{i}$

(E_3) : $-3\mathrm{i}\bar{z}+2=4\mathrm{i}$;

(E_4) : $2z+\mathrm{i}\bar{z}=5-2\mathrm{i}$

(E_5) : $z^3-8z^2+25z=0$.

II **(2 points)** Calculer sous forme algébrique :

$$S=1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\cdots+\mathrm{i}^{101}$$

III **(2 points)** On rappelle que si $z=x+\mathrm{i}y$ avec $x,y\in\mathbb{R}$ alors $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.
Démontrer la propriété suivante pour tout $z\in\mathbb{C}^\star$:

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$$

IV **(10 points)** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout point $M(z)$ avec $z\neq 2\mathrm{i}$, le point M' d'affixe z' donnée par

$$z'=\frac{z-3}{\mathrm{i}z+2}$$

On désigne par A le point d'affixe 3 et B celui d'affixe 2i.

1. On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. Donner alors la forme algébrique de z' en fonction de x et y.
   On montrera en particulier que
   $$\Im z'=\frac{-x^2-y^2+3x+2y}{x^2+(2-y)^2}$$
2. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des point $M(z)$ tels que $z'\in\mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\mathscr{E}$ et donner ses éléments caractéristiques.
3. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des point $M(z)$ tels que z' imaginaire pur. Déterminer la nature de $\mathscr{F}$ et donner ses éléments caractéristiques.