$\boxed{\text{DS 5 (1h)}}$

I ① $(2-i)z+1=0$

$\iff z = -\dfrac{1}{2-i}$

$= -\dfrac{(2+i)}{5}$ $\boxed{S = \left\{-\frac{2}{5} - \frac{i}{5}\right\}}$

② $(3+2i)(z-1) = 1$

$\iff z - 1 = \dfrac{1}{3+2i}$

$\iff z = 1 + \dfrac{3-2i}{13} \iff z = \dfrac{16}{13} - \dfrac{2i}{13}$ $S = \left\{\frac{16}{13} - \frac{2}{13}i\right\}$

③ $-3i\bar{z} + 2 = 4i$

$\iff \bar{z} = \dfrac{4i-2}{-3i}$ $\times \dfrac{i}{i}$

$\iff \bar{z} = \dfrac{-4-2i}{3}$ donc $z = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}i$ donc $S = \left\{-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}i\right\}$

④ $2z + i\bar{z} = 5-2i$

On pose $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$2(x+iy) + i(x-iy) = 5-2i$

$\iff 2x + y + i(x+2y) = 5-2i$

et donc par identification des parties réelles et imaginaires on a

$$\begin{cases} 2x+y = 5 & (L_1) \\ x+2y = -2 & (L_2) \end{cases}$$

$2L_1 - L_2$ donne $3x = 12$ donc $x = 4$

$L_1 - 2L_2$ donne $-3y = 9$ donc $y = -3$ donc $S = \{4-3i\}$

5) $(E_5) \iff z\underbrace{(z^2-8z+25)}_{P(z)}=0$

On cherche les racines de $P(z)$: $\Delta = 64-100=-36<0$

donc P admet pour racine $z_1=\dfrac{8+6i}{2}=4+3i$

et $z_2=4-3i$

Finalement $S=\{0\,;4+3i\,;4-3i\}$.

II) S est la somme des termes d'une suite géométrique :

$$S=1+i+\dots+i^{101}$$
$$=\frac{1-i^{102}}{1-i}$$
$$=\frac{1-(i^2)^{51}}{1-i}=\frac{1-(-1)^{51}}{1-i}=\frac{2}{1-i}$$
$$=\frac{2(1+i)}{2}=1+i.$$

III) On pose $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$; $(x;y)\neq(0;0)$

alors $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}$

$=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ est la forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$

alors par déf du conjugué : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

d'autre part :

et $\dfrac{1}{\bar z}=\dfrac{1}{x-iy}$

$=\dfrac{x+iy}{x^2+y^2}$ donc finalement, on a bien $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar z}$.

IV

① $z' = \dfrac{z-3}{iz+2}$ avec $z \neq 2i$

On pose $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

alors $z' = \dfrac{x+iy-3}{i(x+iy)+2}$ avec $(x;y) \neq (0;2)$

$= \dfrac{x-3+iy}{2-y+ix}$

$= \dfrac{((x-3)+iy)(2-y-ix)}{x^2+(2-y)^2}$

$= \dfrac{(x-3)(2-y)+xy + i\left(y(2-y)-x(x-3)\right)}{x^2+(2-y)^2}$

$= \dfrac{2x+3y-6 + i(-x^2-y^2+2y+3x)}{x^2+(2-y)^2}$

Et ceci est la forme algébrique de z' (en coupant la fraction)

avec en particulier:

$$\boxed{\mathrm{Re}\, z' = \frac{2x+3y-6}{x^2+(2-y)^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Im}\, z' = \frac{-x^2-y^2+2y+3x}{x^2+(2-y)^2}}$$

② $M(z) \in \mathcal{E} \iff z' \in \mathbb{R}$ avec $z \neq 2i$

$\iff \mathrm{Im}\, z' = 0$

$\iff -x^2-y^2+3x+2y = 0$ avec $(x;y) \neq (0;2)$

$\iff x^2+y^2-3x-2y=0$

$\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2 = \frac{9}{4}+1$

$\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$ avec $(x;y) \neq (0;2)$

Alors $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}+i\right)$, rayon $R = \frac{\sqrt{13}}{2}$ privé du point $B(2i)$

③ $M(z) \in \mathcal{F} \iff z'$ imaginaire pur avec $z \neq 2i$

$\iff \mathrm{Re}\, z' = 0$

$\iff 2x + 3y - 6 = 0$ et $(x;y) \neq (0;2)$

$\iff y = -\frac{2}{3}x + 2$

Donc $\mathcal{F}$ est une droite d'éq $y = -\frac{2}{3}x + 2$ privée du point $B(0;2)$